

補題2の証明

新納浩幸

2003/4/23

(1) $S(x) \equiv \log(x) + \frac{1}{x} - 1$ ($x > 0$) とおくと,

$$S(x) \geq 0, \quad S(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} \int p_1(x) S\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) dx &= \int p_1(x) \left(\log\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) + \frac{p_2(x)}{p_1(x)} - 1 \right) dx \\ &= \int p_1(x) \log\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) dx + \int p_2(x) dx - \int p_1(x) dx \\ &= \int p_1(x) \log\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) dx + 1 - 1 \\ &= K(p_1||p_2) \end{aligned}$$

$p_1(x) \geq 0$, $S(x) \geq 0$ なので, $K(p_1||p_2) \geq 0$.

(2) \Leftarrow は明らか. \Rightarrow を示す.

先ほどの式より,

$$\int p_1(x) S\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) dx = K(p_1||p_2) = 0$$

$\int p_1(x) dx = 1$ と $p_1(x) \geq 0$ より, 任意の x に対して $S\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) = 0$.

今, $S(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ なので $\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = 1$.