[注23] の補足

岩崎 唯史

平成15年6月25日

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sigma^{2n}}{n!\,2^n} \nabla_x^{2n} G(x,y) = \delta(x-y), \tag{1}$$

を満たす Green 関数 $G(x,y)$ を求める.

デルタ関数の積分表示, および $G(x,y)$ のフーリエ変換

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk, \tag{2}$$

$$G(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(k)\, e^{ik(x-y)} dk, \tag{3}$$

を式 (1) に代入する.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sigma^{2n}}{n!\,2^n} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \nabla_x^{2n} e^{ik(x-y)} dk &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sigma^{2n}}{n!\,2^n} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) (ik)^{2n} e^{ik(x-y)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} G(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma^2 k^2/2)^n}{n!} dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk. \qquad (4)
\end{aligned}$$

式 (4) は任意の $(x-y)$ について成り立つことから,

$$G(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma^2 k^2/2)^n}{n!} = \frac{1}{2\pi}. \tag{5}$$

ここで $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ であるから, 式 (5) より

$$G(k) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}. \tag{6}$$

式 (6) を式 (3) に代入して

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}+ik(x-y)}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$