例 30 の証明

新納浩幸

2003/5/21

$$
\begin{aligned}
2nL_n(w) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, w))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{h=1}^{H} w_h \sum_{i=1}^{n} 2y_i\varphi_h(x_i) + \sum_{h,h'=1}^{H} w_h w_{h'} \sum_{i=1}^{n} \varphi_h(x_i)\varphi_{h'}(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2nw^t\xi + nw^tGw \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2nw^t\xi + nw^tGw \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで 式 (1) の第 2 項は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
-2nw^t\xi &= -2nw^t(G^{1/2})^t(G^{1/2})G^{-1}\xi \\
&= -2n < G^{1/2}w, (G^{1/2})G^{-1}\xi >
\end{aligned}
$$

また式 (1) の第 3 項は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
nw^tGw &= nw^t(G^{1/2})^t(G^{1/2})w \\
&= n < G^{1/2}w, G^{1/2}w >
\end{aligned}
$$

よって、式 (1) の第 2 項と第 3 項の和は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) + (\text{第 3 項}) &= -2n < G^{1/2}w, (G^{1/2})G^{-1}\xi > + n < G^{1/2}w, G^{1/2}w > \\
&= n\left(< G^{1/2}w, G^{1/2}w > -2 < G^{1/2}w, (G^{1/2})G^{-1}\xi >\right) \\
&= n\left(< G^{1/2}w, G^{1/2}w > -2 < G^{1/2}w, (G^{1/2})G^{-1}\xi > + < G^{1/2}G^{-1}\xi, G^{1/2}G^{-1}\xi >\right) \\
&\qquad - n < G^{1/2}G^{-1}\xi, G^{1/2}G^{-1}\xi > \\
&= n < G^{1/2}w - G^{1/2}G^{-1}\xi, G^{1/2}w - G^{1/2}G^{-1}\xi > -n < G^{1/2}G^{-1}\xi, G^{1/2}G^{-1}\xi > \\
&= n < G^{1/2}(w - G^{-1}\xi), G^{1/2}(w - G^{-1}\xi) > -n\xi^t(G^{-1})^t(G^{1/2})^t G^{1/2}G^{-1}\xi \\
&= n||G^{1/2}(w - G^{-1}\xi)||^2 - n\xi^t G^{-1}\xi \\
&= n||G^{1/2}(w - G^{-1}\xi)||^2 - n\xi^t(G^{-1/2})^t(G^{-1/2})\xi \\
&= n||G^{1/2}(w - G^{-1}\xi)||^2 - n < G^{-1/2}\xi, G^{-1/2}\xi > \\
&= n||G^{1/2}(w - G^{-1}\xi)||^2 - n||G^{-1/2}\xi||^2
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
2nL_n(w) = n||G^{1/2}(w - G^{-1}\xi)||^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n||G^{-1/2}\xi||^2
$$