例 26 の証明

新納浩幸

2003/4/23

$$\int p_1(x)\log p_2(x)dx = -\frac{M}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log(detS_2) - \frac{1}{2}\int (x-m_2)S_2^{-1}(x-m_2)p_1(x)dx$$

右辺の積分に注目

$$\int (x-m_2)S_2^{-1}(x-m_2)p_1(x)dx$$
$$= \int xS_2^{-1}xdx - \int m_2S_2^{-1}xp_1(x)dx - \int xS_2^{-1}m_2p_1(x)dx + \int m_2S_2^{-1}m_2p_1(x)dx \qquad (1)$$

(1) 式の第 1 項 $= E(X_1S_2^{-1}X_1) = tr(S_2^{-1}S_1) + m_1S_2^{-1}m_2$ 　(∵ pp.11 ex13)
(1) 式の第 2 項 $= E(m_2S_2^{-1}X_1) = m_2S_2^{-1}m_1$
(1) 式の第 3 項 $= E(X_1S_2^{-1}m_2) = m_1S_2^{-1}m_2$
(1) 式の第 4 項 $= m_2S_2^{-1}m_2\int p_1(x)dx = m_2S_2^{-1}m_2$

よって、

$$\int (x-m_2)S_2^{-1}(x-m_2)p_1(x)dx = tr(S_2^{-1}S_1) + (m_1-m_2)^tS_2^{-1}(m_1-m_2)$$

一方、

$$\begin{aligned}||S_2^{-1/2}(m_1-m_2)||^2 &= (\Lambda^{-1/2}\Gamma^t(m_1-m_2))^t(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t(m_1-m_2)) \\ &= (m_1-m_2)^t(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t)^t(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t)(m_1-m_2)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t)^t(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t) &= \Gamma(\Lambda^{-1/2})^t(\Lambda^{-1/2})\Gamma^t \\ &= \Gamma(\Lambda^{-1/2})(\Lambda^{-1/2})\Gamma^t \\ &= \Gamma\Sigma^{-1}\Gamma^t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Gamma\Sigma^{-1}\Gamma^t)^{-1} &= \Gamma\Sigma\Gamma^t && (2)\\
&= S_2 && (3)
\end{aligned}
$$

式 2 は $\Gamma^t\Gamma = \Gamma\Gamma^t = I$ から。

よって、

$$(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t)^t(\Lambda^{-1/2}\Gamma^t) = S_2^{-1}$$

よって、

$$||S_2^{-1/2}(m_1 - m_2)||^2 = (m_1 - m_2)^t S_2^{-1}(m_1 - m_2) \quad (4)$$

以上より、

$$\int p_1(x)\log p_2(x)dx = -\frac{M}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log(detS_2) - \frac{1}{2}\{tr(S_2^{-1}S_1) + ||S_2^{-1/2}(m_1 - m_2)||^2\}$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
\int p_1(x)\log p_1(x)dx &= -\frac{M}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log(detS_1) - \frac{1}{2}tr(S_1^{-1}S_1)\\
&= -\frac{M}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log(detS_1) - \frac{1}{2}M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(p_1||p_2) &= \int p_1(x)\log p_1(x)dx - \int p_1(x)\log p_2(x)dx\\
&= -\frac{1}{2}\log(detS_1) - \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\log(detS_2) + \frac{1}{2}\{tr(S_2^{-1}S_1) + ||S_2^{-1/2}(m_1 - m_2)||^2\}\\
&= \frac{1}{2}\{\log(detS_2) - \log(detS_1) + tr(S_2^{-1}S_1) - M + ||S_2^{-1/2}(m_1 - m_2)||^2\}\\
&= \frac{1}{2}\{tr(S_1S_2^{-1}) + \log(det(S_2S_1^{1})) - M + ||S_2^{-1/2}(m_1 - m_2)||^2\}
\end{aligned}
$$

最後の変形には、以下の式を利用

$$\frac{1}{det(S)} = det(S^{-1})$$

$$det(AB) = det(A)det(B)$$