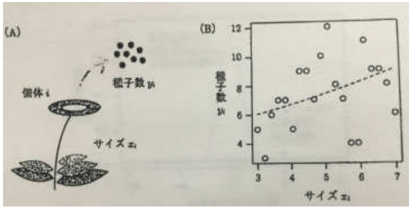
９ GLMのベイズモデル化と事後分布の推定

XIAO LIYING

例題：種子数のポアソン回帰（個体差なし）



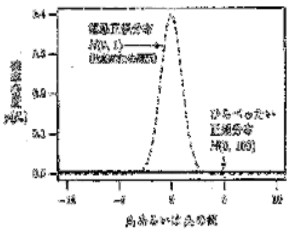
個体ごとの平均種子数が体サイズxiにどう依存しているのか→目的

GLMのベイズモデル化

- 個体iの種子数yiのばらつきを平均λiのポアソン分布p(yi| λi)に従う。
- $\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$
- 尤度関数:
  $L(\beta_1, \beta_2) = \prod_i \ p(y_i|\lambda_i) = \prod_i p(y_i|\beta_1, \beta_2, x_i)$
- $p(\beta_1, \beta_2|Y) \propto p(Y|\beta_1, \beta_2)p(\beta_1)p(\beta_2)$
- 事後分布　　　　　　　　事前分布

無情報事前分布

- GLMのパラメーターβの事前分布$p(\beta_*)$の設定。
- β_*の値は$[-\infty, \infty]$の範囲で $-\!\!\rightarrow$ 無情報事前分布。



ひらべったい正規分布→$p(\beta_*)$

ベイズ統計モデルの事後分布の推定

- このベイズ統計モデルと例題データにもとづいて、切片β_1と傾きβ_2の事後分布$p(\beta_1, \beta_2|Y)$をMCMCサンプリングを使って推定
- ベイズ化したGLMをBUGSコードで表現
- model {

```
model {
        Tau.noninformative <- 1.0E-4
        for (i in 1:N) {
         Y[i] ~ dpois(lambda[i])
        log(lambda[i]) <- beta1 + beta2 * (X[i] - Mean.X)
         }
         beta1 ~ dnorm(0, Tau.noninformative)
        beta2 ~ dnorm(0, Tau.noninformative)
}
```

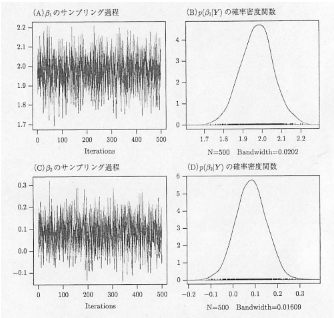
ベイズ統計モデルの事後分布の推定

＊モデル中で使われるデータやパラメーターの初期値、さらにサンプリング回数などを指示します。（Rを使ってWinBUGSを操作します。）

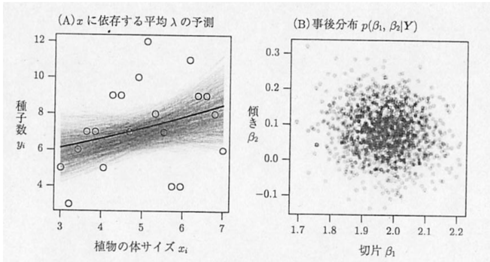
```
source("R2WBwrapper.R")
load("d.RData")
clear.data.param()

set.data("N", nrow(d))
set.data("Y", d$y)
set.data("X", d$x)
set.data("Mean.X", mean(d$x))

set.param("beta1", 0)
set.param("beta2", 0)

post.bugs <- call.bugs( file = "model.bug.txt",
n.iter = 1600, n.burnin = 100, n.thin = 3 )
post.mcmc <- to.mcmc(post.bugs)＃500*3ステップのサンプル列が得られます。
```

MCMCサンプルから事後分布を推定

```
>post.list<- to.list(post.bugs)
>post.mcmc<-to.mcmc(post.bugs)
>s<-colnames(post.mcmc)
%in% c("beta1","beta2")
>plot(post.list[,s,])
```



MCMCサンプルから事後分布を推定



1パラメータの事後分布からのサンプル$\{\beta_1, \beta_2\}$の組み合わせごとの平均λの予測。

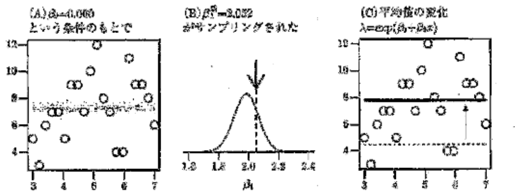
2　plot(as.matrix(post.mcmc)[,c("beta1","beta2")])

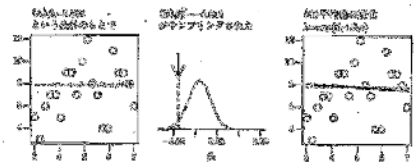
→{beta1,beta2}のMCMCサンプル間には強い相関がない

複数パラメーターのMCMCサンプリング

- ギブスサンプリング
- $\{\beta_1, \beta_2\}$={1.5,0}
- $p(\beta_1|Y, \beta_2 = 0.0) \propto \prod_i \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!} p(\beta_1)$

  ……$\lambda_i = \exp(\beta_1 + 0)$ —→ 新しいβ_1=2.052→λ_i=exp(2.052+$\beta_2 x_i$)
- $p(\beta_2|Y, \beta_1 = 2.052) \propto \prod_i \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!} p(\beta_2)$





$$p(\beta_2|Y, \beta_1 = 2.052) \propto \prod_i \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!} p(\beta_2)$$

以上のステップを繰り返す。

利点：各MCMCステップにおいてもとの値と更新された値の相関がより小さい。