続・わかりやすいパターン認識
-教師なし学習入門-

第1章 ベイズ統計学

11T4056H　永田 純平

1.1. 試行と事象

$P(X = x) = P(x) \rightarrow$ 確率関数

X:確率変数

変数Xが特定の範囲に定義される

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx$$

※$p(x)$: 確率密度関数

確率関数の確率変数/分布･･･離散型確率変数/分布

確率密度関数の確率変数/分布･･･連続型確率変数/分布

1.2. ベイズの定理

例)X − 色, S − 当落を示す

	S = 当	S = 外	計
X = 白	P(白, 当) = 2/10	P(白, 外) = 2/10	P(白) = 4/10
X = 黒	P(黒, 当) = 1/10	P(黒, 外) = 5/10	P(黒) = 6/10
	P(当) = 3/10	P(外) = 7/10	

※$P(X, S) = P(S, X)$

$P(S) = \sum_X P(X, S), P(X) = \sum_S P(X, S)$ → 周辺化

<条件付き確率>

Sである条件でXである確率 → $P(X|S)$

P(当|白) = 2/4 = 1/2

$$\sum_X P(X|S) = \sum_S P(S|X) = 1$$

$$P(X,S)$$
$$= P(X|S)P(S)$$
$$= P(S|X)P(X)$$

↓

$$P(X|S) = P(X)$$
$$P(S|X) = P(S)$$
$$P(X,S) = P(X)P(S)$$

↓

「事象XとSは互いに**独立**である」

$$P(X,Y|S)$$
$$= P(X|Y,S)P(Y|S)$$
$$= P(Y|X,S)P(X|S)$$

↓

$$P(X,Y|S) = P(X|S)P(Y|S)$$

↓

「Sが与えられた下で事象XとSは**条件付き独立**である」

<ベイズの定理>

$$P(S|X) = \frac{P(X,S)}{P(X)} = \frac{P(X|S)}{P(X)} \cdot P(S)$$

$$P(S|X) = \frac{P(X|S)}{\sum_S P(S)P(X|S)} \cdot P(S)$$

1.3 頻度から確信度へ

ベイズ統計学では確率を確信の度合、確信度で定義する

↓

「事前確率が事後確率に変化する」

※確信度は過去、現在、未来の現象にも定義することができ、確信度を基にしたベイズ統計学における確率は主観確率と呼ばれる。

1.4 逆確率-結果から原因を-

Sを原因、Xを結果として考える場合

→$P(X|S)$は求めやすいが、$P(S|X)$は求めるのが難しい

※$P(S|X)$を逆確率と呼ぶ

	$S=$ 非 (非感染)	$S=$ 感 (感染)
$X=$ 陰 (陰性) $X=$ 陽 (陽性)	$P(\text{陰}|\text{非})=0.99$ $P(\text{陽}|\text{非})=0.01$	$P(\text{陰}|\text{感})=0.02$ $P(\text{陽}|\text{感})=0.98$
事前確率	$P(\text{非})=0.999$	$P(\text{感})=0.001$

$$P(\text{感}|\text{陽})=\frac{P(\text{感}|\text{陽})}{P(\text{非})P(\text{陽}|\text{非})+P(\text{感})P(\text{陽}|\text{感})}\cdot P(\text{感})$$

$$=\frac{0.98\times 0.001}{0.999\times 0.01+0.001\times 0.98}=0.089$$

1.5 三つの扉問題

三つの扉A,B,Cに正解が一つあり、回答者が扉を一つ選択する、選択した扉を開ける前に正解を知っている出題者が選択した扉以外の二つの扉から外れの扉一つを開ける。その後扉の選択の変更が可能である。出題者は三つの扉を公平に扱う。

(今回では回答者は扉Aを選択、出題者は扉Bを開けたとする)

1)回答者が最初に扉Aを選択した時点での正解の確率

2)出題者が扉Bを開け、それが外れとわかった後に扉Aが正解である確率

3)この後、回答者のとるべき行動

- そのまま
- AからCに変更
- 変更してもしなくても同じ

(1)回答者が最初に扉Aを選択した時点での正解の確率

$\rightarrow \frac{1}{3}$

(2)出題者が扉Bを開け、それが外れとわかった後に扉Aが正解である確率

→どの扉を開けるのかを条件として条件付き確率を計算する

[1] 扉Aが当たりの場合

$$P(O_B|W_A) = \frac{1}{2}\,, P(O_C|W_A) = \frac{1}{2}$$

[2] 扉Bが当たりの場合

$$P(O_B|W_B) = 0\,, P(O_C|W_B) = 1$$

[3] 扉Cが当たりの場合

$$P(O_B|W_C) = 1\,, P(O_C|W_C) = 0$$

$$P(W_A|O_B)$$

$$= \frac{P(W_A)P(O_B|W_A)}{P(W_A)P(O_B|W_A) + P(W_B)P(O_B|W_B) + P(W_C)P(O_B|W_C)}$$

$$= \frac{(1/3)\cdot(1/2)}{(1/3)\cdot(1/2) + (1/3)\cdot 0 + (1/3)\cdot 0} = 1/3$$

同様にして

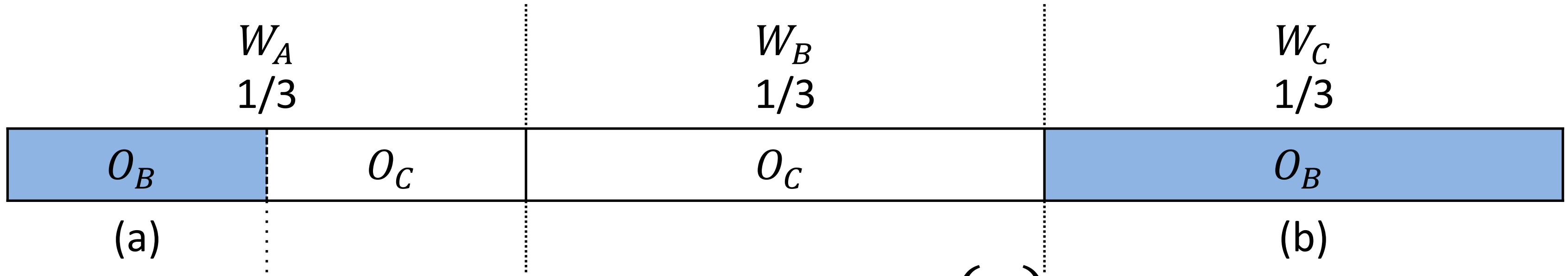
$$P(W_B|O_B) = 0$$

$$P(W_C|O_B) = 2/3$$

3)この後、回答者のとるべき行動

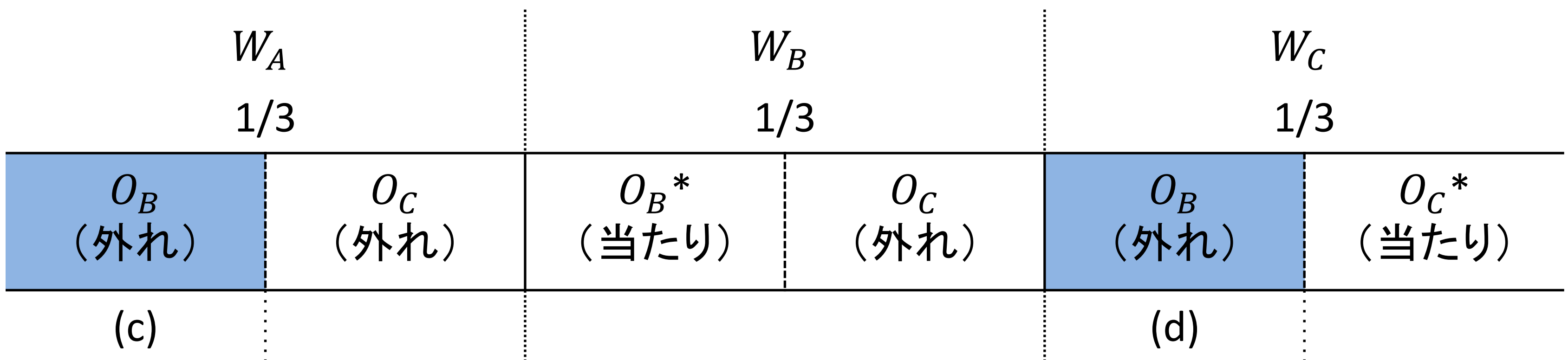
→AからCに変更

- 出題者が正解の場所を知っている場合



$$P(W_A|O_B) = \frac{(a)}{(a)+(b)}$$

- 出題者が正解の場所を知らない場合



$$P(W_A|O_B) = \frac{(c)}{(c)+(d)}$$