わかりやすいパターン認識

第３章　ベイズ決定則

菊池裕紀

パターン認識

- 観測されたパターンをあらかじめ定められた複数のクラスのうち一つに対応させる処理

パターン ： $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)^t$

クラス ： $\boldsymbol{c} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_c) \ (c \geq 2)$

識別関数 ： $g_i(\boldsymbol{x}) \ (i = 1,2, \dots, c)$

$$k = argmax_i \, \{g_i(\boldsymbol{x})\}$$

事後確率最大化(1)

- 事後確率が最大となるクラスに分類する処理(ベイズ決定則)

例:コインの問題

コインの種類 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

含有率 π_1, π_2, π_3

表の出る確率 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

n回投げてr回表が出た時のそれぞれのコインの事後確率

$$g_i\left(X^{(n)}\right) = P\left(\omega_i \middle| X^{(n)}\right) = \frac{P(\omega_i)P\left(X^{(n)} \middle| \omega_i\right)}{P\left(X^{(n)}\right)} = \frac{\pi_i \theta_i^r (1-\theta_i)^{n-r}}{\sum_{i=1}^{3} \pi_i \theta_i^r (1-\theta_i)^{n-r}}$$

ベイズ識別関数

事後確率最大化(2)

- コイン$\omega_1, \omega_2, \omega_3$の含有率がそれぞれ$0.1$, 0.4 , 0.5、表の出る確率が0.8 , 0.6 , 0.3とする。コインを無造作に1枚取り出し10回投げ、８回表が出たときそのコインの種類は？

$$\left.\begin{array}{l} P(\omega_1|X^{10}) = 0.381 \\ P(\omega_2|X^{10}) = 0.610 \\ P(\omega_3|X^{10}) = 0.009 \end{array}\right\} \quad argmax_{\omega_i}\{P(\omega_i|X^{(10)})\} = \omega_2$$

- 試行回数が少ない場合、事前確率の影響が大きくでる

ベイズ誤り確率(1)

- ベイズ決定則を適用した時に発生する誤り確率

コインをn回投げて得られた $X^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対してベイズ決定則を適用した時の誤り確率

$$e_B(X^n) = 1 - \max\{P(\omega_i|X^n)\} = \min\ \{1 - P(\omega_i|X^n)\}$$

条件付きベイズ誤り確率

$e_B(X^n)$ の X^n に関する期待値をとって e_B を求める

ベイズ誤り確率(2)

- ベイズ誤り確率の計算

$$e_B = \sum_{X^n} e_B\left(X^{(n)}\right) P(X^{(n)})$$

$$= \sum_{X^n} \min\{1 - P(\omega_i | X^{(n)})\} \, P(X^{(n)})$$

ここで$P(\omega_i | X^{(n)})$は、$x_1 x_2 \cdots x_n$の順序に依存しないことを考えると

$$e_B = \sum_{r=0}^{n} e_B(r) \, P(r)$$