1.3 確率

永田 純平

確率とは…

ある事象の発生する可能性の大きさを表すもの

[例]

$\mathrm{P(X = 0) = 0.1} \rightarrow$ Xが0となる確率0.1

$\mathrm{P(X = 1) = 0.6} \rightarrow$ Xが1となる確率0.6

$\mathrm{P(X = 2) = 0.3} \rightarrow$ Xが2となる確率0.3

$$\sum_{x \in \{X\text{の値の集合}\}} P(X = x) = 1$$

1.3.1 期待値、平均、分散

$$m_X(\text{期待値}) = \sum_x xP(X = x)$$

$$\sigma_X^2(\text{分散}) = \sum_x (x - m_X)^2 P(X = x)$$

標本平均、標本分散

$$\bar{X}(\text{標本平均}) = \frac{1}{|D|}\sum_{x^{(i)}\in D} x^{(i)}$$

$$S^2(\text{標本分散}) = \frac{1}{|D|}\sum_{x^{(i)}} (x^{(i)} - \bar{X})^2$$

$*$ D・・・観測したデータ$\{x^1, x^2,$ ・・・$, x^{|D|}\}$

1.3.2 結合確率と条件付き確率

・結合確率・・・$P(X = x, Y = y)$

・条件付確率・・・$P(X = x|Y = y), P(X|Y)$

ベイズの定理

$$P(x, y) = P(y|x)P(x) = P(x|y)P(y)$$

$$P(y|x) = \frac{P(y)P(x|y)}{P(x)}$$

1.3.3 独立性

独立

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$P(x|y)P(y) = P(x)P(y)$$

$$P(x|y) = P(x)$$

条件付き独立

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|x_3)$$

$$= P(X_1 = x_1|x_3)P(X_2 = x_2|x_3)$$

[1] ベルヌーイ分布

とりうる値が2つの確率変数を表す分布

[例]Xが確率pでa、確率(1-p)でbをとる

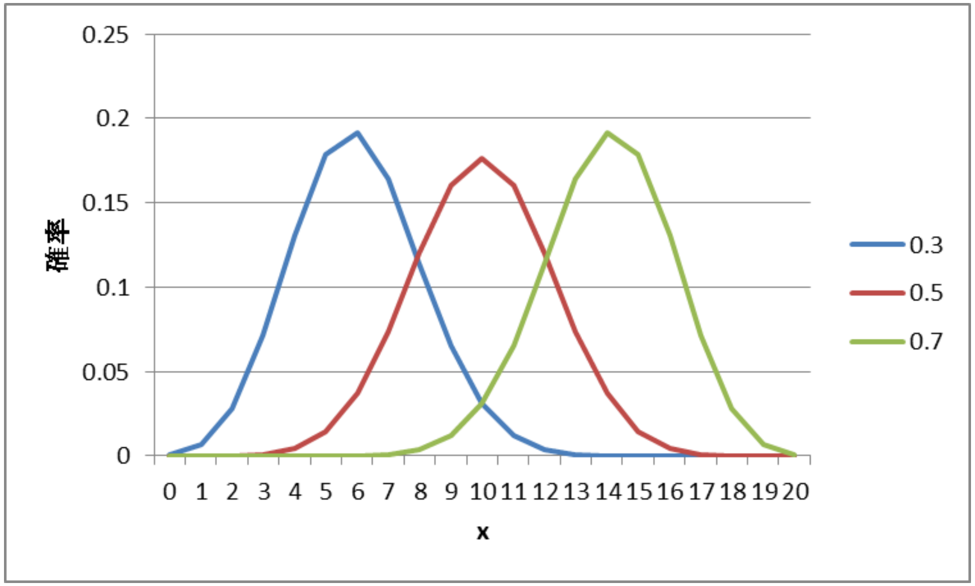
$$P(X = x; p) = \delta(x; a)p + \delta(x; b)(1 - p)$$
$$= p^{\delta(x,a)}(1 - p)^{1-\delta(x,a)}$$

$* \, \delta(x; a) \to x = a$のとき$1$

それ以外のとき0

[2] 二項分布

　とりうる値が2つの確率変数で、n回試行したとき、確率pのある値がx回出たときの確率を求める分布



$$P(x;p,n)$$
$$= \ {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

[3] 多項分布

とりうる値が二つよりおおく、二項分布をより一般化した分布

m個の値をとる確率変数で、それぞれに$p_1, p_2, \cdots, p_m$と確率が与えられており、これをn回試行した

それぞれが$k_1, k_2, \cdots, k_m$回起こる確率は

$$(\text{確率}) = \frac{n!}{\prod_i k_i!}\prod_i p_i^{k_i}$$

[4] ポアソン分布

$$P(x|\mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

＊x･･･確率変数
μ･･･パラメータ（> 0）