homework20130618

小野寺喜行

平成 25 年 6 月 25 日

1 次元の確率変数 X がガウス分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従うとき、その平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ が μ と σ^2 になることを示せ。ただし X の密度関数 $f(x)$ は以下で表せる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{1}$$

また $\int f(x)\,dx = 1$ は既知とする。

(解)

1 平均 $E(X)$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \tag{2}$$

である。ここで

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t \tag{3}$$

とおくと

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\sigma t + \mu & (4) \\ dx &= \sqrt{2}\sigma dt & (5) \end{aligned}$$

また、$x \to \infty$ のとき $t \to \infty$、$x \to -\infty$ のとき $t \to -\infty$ となるので

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + \mu\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dt & (6) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + \mu\right) e^{-t^2} dt & (7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt &= \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 & (8) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt &= \sqrt{\pi} & (9) \end{aligned}$$

であるので、

$$E\left(x\right)=\mu \tag{10}$$

となる。

2　分散 $V\left(X\right)$

まず、

$$E\left(x^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f\left(x\right)dx \tag{11}$$

を求める。(3) のように変数変換を行うと

$$\begin{aligned}E\left(x^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sigma t+\mu\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\sigma dt \qquad (12)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\sigma^2t^2+2\sqrt{2}\sigma\mu t+\mu^2\right)e^{-t^2}dt \qquad (13)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (14)\\ \int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt &= 0 \qquad (15)\\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt &= \sqrt{\pi} \qquad (16)\end{aligned}$$

となるので

$$E\left(x^2\right)=\sigma^2+\mu^2 \tag{17}$$

よって、(10),(17) より

$$\begin{aligned}V\left(x\right) &= E\left(x^2\right)-E\left(x\right)^2 \qquad (18)\\ &= \sigma^2 \qquad (19)\end{aligned}$$

となる。