

homework20130611

小野寺喜行

平成 25 年 6 月 25 日

確率変数 X の分布がベルヌーイ分布であり、 $P(X = 1) = \mu$ とする。 μ の事前分布にベータ分布 $Beta(a, b)$ を用いる。観測データ集合 D (全体の個数は N 、うち 1 となった個数 m) が与えられたときに、予測分布 $P(X = 1|D)$ が以下で表せることを示せ。

$$\frac{m + a}{m + a + l + b} \quad (1)$$

ただし、 $l = N - m$ 。

(解)

$p(X = 1|D)$ は

$$p(X = 1|D) = \int_0^1 p(X = 1|\mu) p(\mu|D) d\mu \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \mu p(\mu|D) d\mu \quad (3)$$

$$= \mathbb{E}[\mu|D] \quad (4)$$

となる。また、

$$Beta(\mu|a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-1} (1-\mu)^{b-1} \quad (5)$$

のとき

$$\mathbb{E}[\mu] = \frac{a}{a+b} \quad (6)$$

となる。よって、

$$p(\mu|D) = \frac{\Gamma(m+a+l+b)}{\Gamma(m+a)\Gamma(l+b)} \mu^{m+a-1} (1-\mu)^{l+b-1} \quad (7)$$

であるので、このとき (5),(6) より

$$\mathbb{E}[\mu|D] = \frac{m+a}{m+a+l+b} \quad (8)$$

(4),(8) より

$$p(X = 1|D) = \frac{m+a}{m+a+l+b} \quad (9)$$

となる。