homework20130604

小野寺喜行

平成 25 年 6 月 10 日

分布 $\mathbb{P} = (p_1, p_2, \cdots, p_M)$ のエントロピーが最大になるのは $p_i = 1/M$ となる時であることを示せ

(解)
ラグランジュ乗数法より

$$\tilde{\mathrm{H}} = -\sum_i^M p_i \ln p_i + \lambda \left(\sum_i^M p_i - 1 \right) \tag{1}$$

また、

$$\sum_i^M p_i = 1 \tag{2}$$

(2) の条件のもとで (1) を最大化する。
(1) を $p_1, p_2, \cdots, p_M, \lambda$ で微分すると

$$\frac{\delta \tilde{\mathrm{H}}}{\delta p_1} = -\ln p_1 + \frac{p_1}{p_1} - \lambda = \ln p_1 + 1 - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\delta \tilde{\mathrm{H}}}{\delta p_2} = -\ln p_2 + \frac{p_2}{p_2} - \lambda = \ln p_2 + 1 - \lambda = 0 \tag{4}$$

$$\vdots \tag{5}$$

$$\frac{\delta \tilde{\mathrm{H}}}{\delta p_M} = -\ln p_M + \frac{p_M}{p_M} - \lambda = \ln p_M + 1 - \lambda = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\delta \tilde{\mathrm{H}}}{\delta \lambda} = \sum_i^M p_i - 1 = 0 \tag{7}$$

(3)〜(6) より

$$\ln p_1 = \ln p_2 = \cdots = \ln p_M = \lambda - 1 \tag{8}$$

(7),(8) より

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_M = \frac{1}{M} \tag{9}$$

また、(1) を 2 階微分すると

$$\frac{\delta \tilde{\mathrm{H}}}{\delta p_i \delta p_j} = -I_{ij} \frac{1}{p_i} \tag{10}$$

ただし、I_{ij} は単位行列の成分を表す。
よって、(9),(10) より、分布 $\mathbb{P} = (p_1, p_2, \cdots, p_M)$ のエントロピーが最大になるのは $p_i = 1/M$ となる時である。