homework20130514

小野寺喜行

平成 25 年 5 月 21 日

1　p.25 の式 (1.48) を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\left(x|\mu,\sigma^2\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}dx \tag{1}$$

このとき、

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t \tag{2}$$

とおくと、$x \to -\infty$ のとき $t \to -\infty$、$x \to \infty$ のとき $t \to \infty$ 、$dx = \sqrt{2}\sigma dt$ となるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\left(x|\mu,\sigma^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{3}$$

ガウス積分の公式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4}$$

である。よって (3)、(4) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\left(x|\mu,\sigma^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1 \tag{5}$$

となる。

2　p.27 の式 (1.55) と式 (1.56) を示せ。

$$\ln p\left(\mathbf{x}|\mu,\sigma^2\right) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2 - \frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{N}{2}\ln(2\pi) \tag{6}$$

2.1 μ に関して最大化

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}\ln p\left(\mathbf{x}|\mu,\sigma^2\right) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}-2\left(x_n-\mu\right) &(7)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\mu\right)=0 &(8)\end{aligned}$$

となる μ は

$$\begin{aligned}N\cdot\mu &= \sum_{n=1}^{N}x_n &(9)\\ \mu &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n &(10)\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\mu^2}\ln p\left(\mathbf{x}|\mu,\sigma^2\right) &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}-1 &(11)\\ &= -\frac{N}{\sigma^2}<0 &(12)\end{aligned}$$

となる。よって (10)、(12) より

$$\mu_{ML}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n \tag{13}$$

である。

2.2 σ^2 に関して最大化

$$\frac{d}{d\sigma^2}\left(\mathbf{x}|\mu_{ML},\sigma^2\right)=\frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\mu_{ML}\right)^2-\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}=0 \tag{14}$$

となる σ^2 は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\mu_{ML}\right)^2-N\cdot\sigma^2 &= 0 &(15)\\ \sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\mu_{ML}\right)^2 &(16)\end{aligned}$$

また、

$$\sigma^2<\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\mu_{ML}\right)^2 \tag{17}$$

のとき

$$\frac{d}{d\sigma^2}\left(\mathbf{x}|\mu_{ML},\sigma^2\right) > 0 \tag{18}$$

となり

$$\sigma^2 > \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_{ML})^2 \tag{19}$$

のとき

$$\frac{d}{d\sigma^2}\left(\mathbf{x}|\mu_{ML},\sigma^2\right) < 0 \tag{20}$$

となる。よって (16)、(17)〜(20) より

$$\sigma_{ML}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_{ML})^2 \tag{21}$$

である。

3　p.27 の式 (1.57) と式 (1.58) を示せ。

3.1　$\mathbb{E}[\mu_{ML}]$ を示す

集合 X において、サンプル x_n の確率を X_i とおくと、X と X_i は同じ分布となるので、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mu_{ML}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n\right] && (22)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}[x_n] && (23)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}[x] && (24)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}N\left(x|\mu,\sigma^2\right)x\,dx && (25)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu && (26)\\
&= \mu && (27)
\end{aligned}$$

3.2　$\mathbb{E}\left[\sigma^2_{ML}\right]$ を示す

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sigma^2_{ML}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_{ML})^2\right] && (28)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu_{ML})^2\right] && (29)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\{(x_n-\mu)+(\mu-\mu_{ML})\}^2\right] && (30)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)^2+2\,(x_n-\mu)\,(\mu-\mu_{ML})+(\mu-\mu_{ML})^2\right] && (31)
\end{aligned}
$$

式 (31) 各項の値を求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)^2\right] &= \frac{1}{N}\cdot N\cdot\sigma^2 && (32)\\
&= \sigma^2 && (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)\,(\mu-\mu_{ML})\right] &= \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)\left(\mu-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{N}\right)\right] && (34)\\
&= \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)\left\{-\frac{(\mu-x_1)\,(\mu-x_2)+\cdots+(\mu-x_n)}{N}\right\}\right] && (35)\\
&= \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[-\frac{(x_n-\mu)^2}{N}\right] && (36)\\
&= -\frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_n-\mu)^2\right] && (37)\\
&= -\frac{2}{N^2}\cdot N\cdot\sigma^2 && (38)\\
&= -\frac{2\sigma^2}{N} && (39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[(\mu-\mu_{ML})^2\right] &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{(\mu-x_1)+(\mu-x_2)+\cdots+(\mu-x_n)}{N}\right\}^2\right] && (40)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{(\mu-x_n)}{N}\right\}^2\right] && (41)\\
&= \frac{1}{N}\cdot N\cdot\frac{1}{N^2}\cdot\sigma^2 && (42)\\
&= \frac{\sigma^2}{N} && (43)
\end{aligned}
$$

となる。よって (33)、(39)、(43) より

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sigma^2_{ML}\right] &= \sigma^2-\frac{2\sigma^2}{N}+\frac{\sigma^2}{N} && (44)\\
&= \left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2 && (45)
\end{aligned}
$$

である。