homework0604

吉田　拓夢

2013 年 6 月 25 日

分布 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ に対する分布 $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ の KL 情報量は以下で定義される.

$$\mathrm{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = \sum_{n=1}^{n} p_i \, log \frac{q_i}{p_i}$$

$\mathrm{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = 0$ ならば $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ となることを示せ.

解)$\mathrm{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = 0$ かつ $p_i \neq q_i$ と仮定する.

まず, 自然対数について以下が成り立つ.

$$log\, x \leq x - 1 \qquad\qquad (x > 0)$$

等号は $x = 1$ のときのみ成立する. ここで, $p_i \neq q_i$ より $\frac{q_i}{p_i} \neq 1$ だから,

$$\sum_{n=1}^{n} p_i \, log \frac{q_i}{p_i} < \sum_{n=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) \tag{1}$$

定義と仮定より, 左辺 $= \mathrm{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = 0$ である.

また, 右辺 $= \sum_{n=1}^{n} p_i (\frac{q_i}{p_i} - 1) = \sum_{n=1}^{n} (q_i - p_i) = \sum_{n=1}^{n} q_i - \sum_{n=1}^{n} p_i = 1 - 1 = 0$ である.

従って, 式 (1) は

$$0 < 0$$

これは, 明らかな矛盾である.

故に,$\mathrm{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = 0$ ならば $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ となる.