

# 「パターン認識と機械学習」

## 2-4-1 最尤推定と十分推定量

新納浩幸

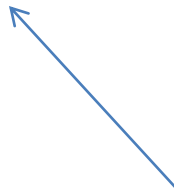
# $\eta$ の最尤推定

$x$  上の指数分布族:

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\eta}) = h(\mathbf{x}) g(\boldsymbol{\eta}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{x})\}$$

$x$  で積分して正規化する

$$g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{x})\} d\mathbf{x} = 1$$



積分の外に出ることに注意

$\eta$  について両辺を微分

$$\begin{aligned} \nabla g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{x})\} d\mathbf{x} \\ + g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{x})\} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\nabla g(\boldsymbol{\eta})}{g(\boldsymbol{\eta})} = \int h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{x})\} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= E(u(\mathbf{x}))$$

注意

$E(u(\mathbf{x}))$  は  $g(\boldsymbol{\eta})$   
のみに依存

$$-\nabla \ln g(\boldsymbol{\eta}) = E(u(\mathbf{x}))$$

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  に対する尤度関数

$$p(\mathbf{X} | \boldsymbol{\eta}) = \left( \prod_{n=1}^N h(\mathbf{x}_n) \right) g(\boldsymbol{\eta})^N \exp \left\{ \boldsymbol{\eta}^T \sum_{n=1}^N u(\mathbf{x}_n) \right\}$$

両辺の対数を取る

$$\ln p(\mathbf{X} | \boldsymbol{\eta}) = \sum_{n=1}^N \ln h(\mathbf{x}_n) + N \ln g(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\eta}^T \sum_{n=1}^N u(\mathbf{x}_n)$$

微分して 0 の極値条件を使って

$$-\nabla \ln g(\boldsymbol{\eta}_{ML}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(\mathbf{x}_n)$$

# 十分統計量

$$-\nabla \ln g(\boldsymbol{\eta}_{ML}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(\mathbf{x}_n)$$

$\boldsymbol{\eta}_{ML}$  は  $\sum_{n=1}^N u(\mathbf{x}_n)$  のみに依存

十分統計量



# 十分統計量の例

ベルヌーイ分布 (01分布)

$$u(x) = x \quad \text{なので} \quad \sum_n x_n \quad \text{で十分}$$

ガウス分布 (正規分布)

$$u(x) = (x, x^2)^T \quad \text{なので}$$

$$\sum_n x_n \quad \text{と} \quad \sum_n x_n^2 \quad \text{で十分}$$