「パターン認識と機械学習」
2-3-8 周期変数

新納浩幸

ガウス分布が不適切な場合

平均・分散が原点の取り方に依存

← ガウス分布は不適切

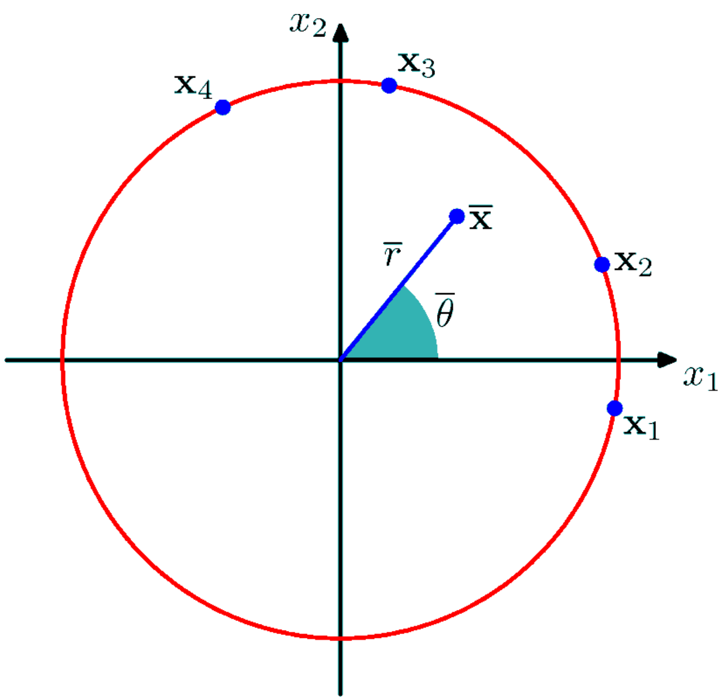
例）

周期変数（1日、1年、など）

風向き

周期変数の平均

周期変数の観測値の集合　$D=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$



θ_i　を左図のような　x_i

に変換し、平均を求める

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\Rightarrow\quad \overline{\theta}=\tan^{-1}\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\}$$

原点の取り方に依存しない

フォン･ミーゼス分布

周期変数上のガウス分布はどうなるか？

$$
\left.
\begin{aligned}
&p(\theta) \geq 0 \\
&\int_0^{2\pi} p(\theta)\,d\theta = 1 \\
&p(\theta + 2\pi) = p(\theta)
\end{aligned}
\right\}
$$

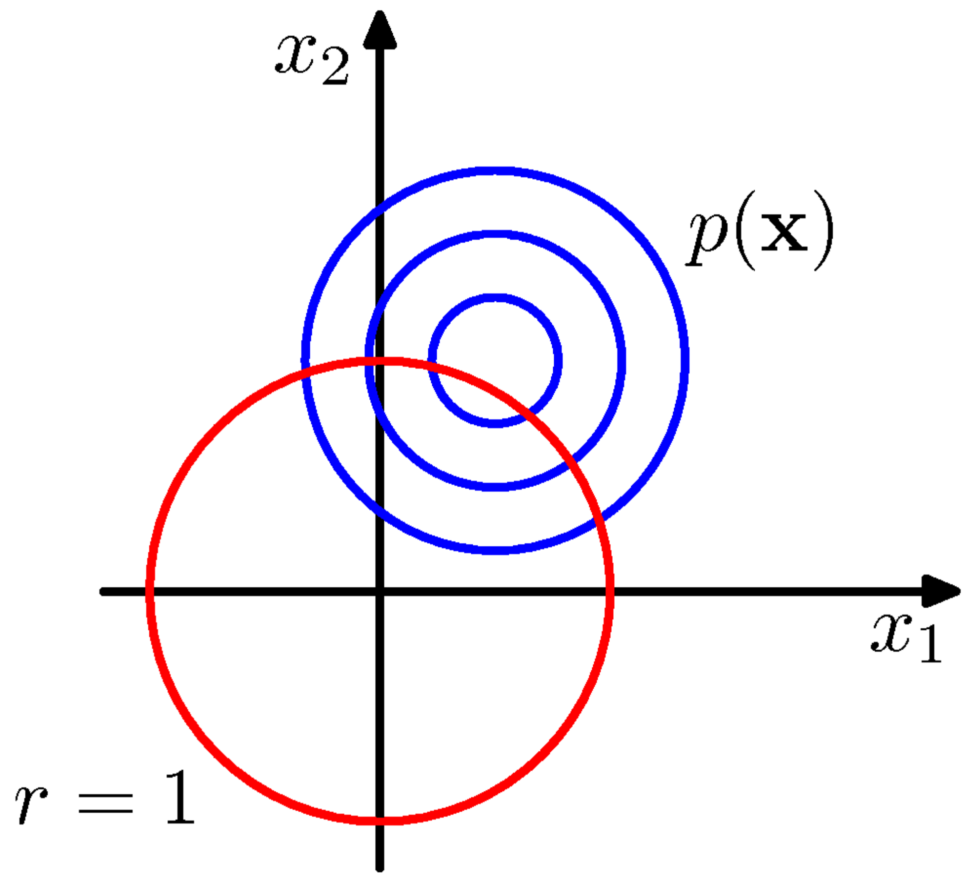
これらは必要な条件

Θ が独立な2変数で表現され、分散が等しいとする

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{(x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

フォン･ミーゼス分布

分布のイメージ図



等高線の分布

極座標での表現(1)

$$x_1 = r\cos\theta \qquad \mu_1 = r_0\cos\theta_0$$
$$x_2 = r\sin\theta \qquad \mu_2 = r_0\sin\theta_0$$

$$r = 1$$

指数部分 ＝

$$-\frac{(x_1-\mu_1)^2+(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{(r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta - r_0\sin\theta_0)^2}{2\sigma^2}$$
$$=\frac{2r_0(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)-(1+r_0^2)}{2\sigma^2}$$
$$=\frac{r_0}{\sigma^2}\cos(\theta-\theta_0)+const.$$

極座標での表現（2）

$$p(\theta \mid \theta_0, m) = \frac{1}{2\pi I_0(m)} \exp\{m \cos(\theta - \theta_0)\}$$

$$I_0(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{m \cos\theta\} d\theta$$

θ_0 ：平均

$m = \dfrac{r_0}{\sigma^2}$ ：集中度パラメータ（逆分散に相当）

フォン・ミーゼス分布の最尤推定

$$\ln p(\mathcal{D}|\theta_0, m) = -N\ln(2\pi) - N\ln I_0(m) + m\sum_{n=1}^{N}\cos(\theta_n - \theta_0)$$

極値条件から

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(\theta_n - \theta_0) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{N}(\sin\theta_n\cos\theta_0 - \cos\theta_n\sin\theta_0) = 0$$

$$\cos\theta_0\sum_{n=1}^{N}\sin\theta_n = \sin\theta_0\sum_{n=1}^{N}\cos\theta_n$$

$$\boxed{\theta^{ML} = \tan^{-1}\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\}}$$