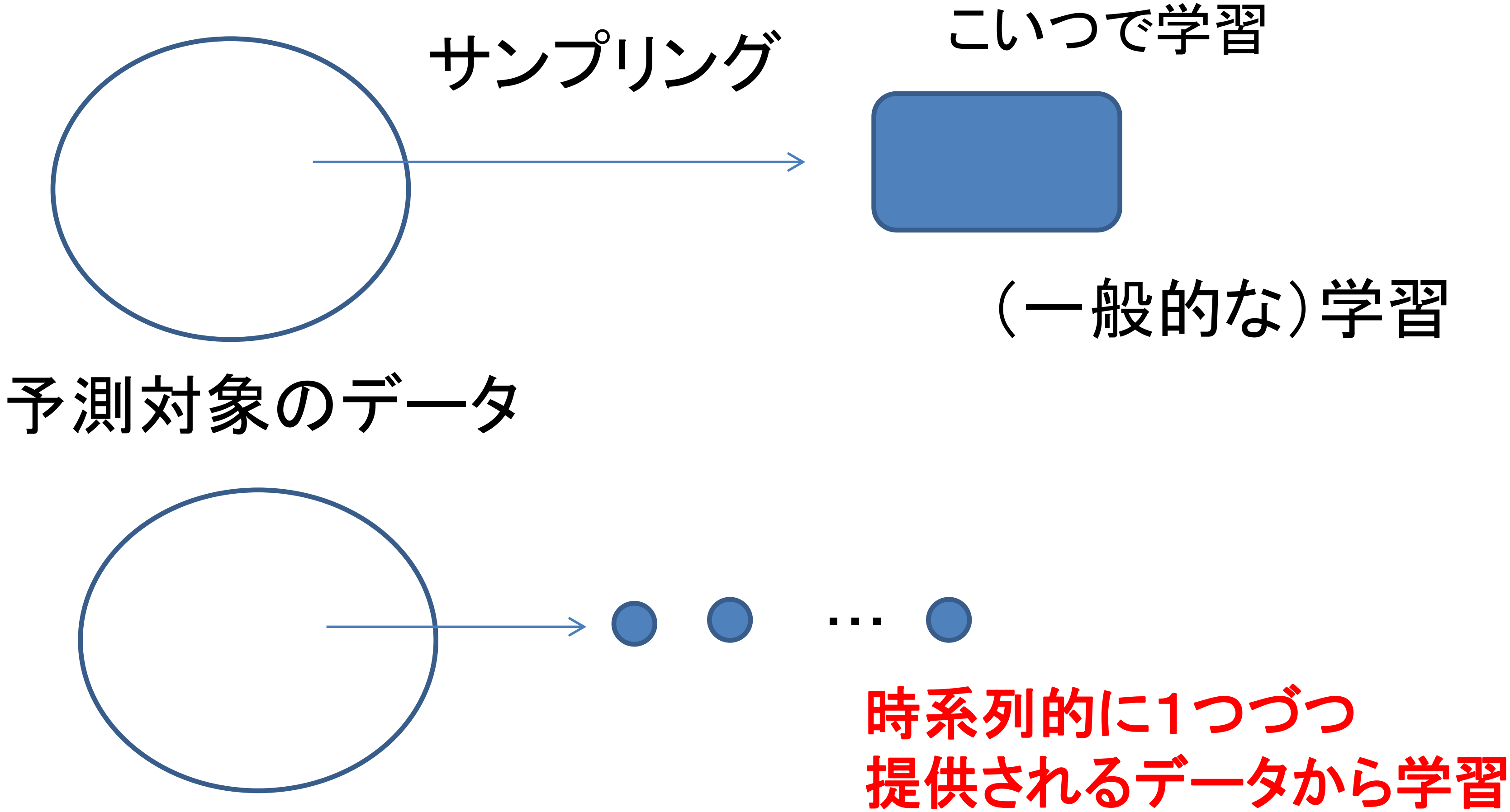
「パターン認識と機械学習」
2-3-5 逐次推定

新納浩幸

逐次推定とは

一般には**オンライン学習**と呼ばれている



平均値の推定(1)

$D=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$　が一括して与えられていたら、

$$\mu_{ML}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

x_i　が1つづつ与えられ、N 番目を与えら得たとき、

$\mu_{ML}^{(N-1)}$　: N-1 番目まで与えら得たときの推定値

$$\boxed{\mu_{ML}^{(N)}=\mu_{ML}^{(N-1)}+\frac{1}{N}(x_n-\mu_{ML}^{(N-1)})}$$

平均値の推定(2)

$$\mu_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \mu_{ML}^{(N)} = \mu_{ML}^{(N-1)} + \frac{1}{N}\left(x_n - \mu_{ML}^{(N-1)}\right)$$

同じ値

一般にはこんなうまくは求められない、どうするか？

Robbins-Monro アルゴリズム

回帰関数

$p(z,\theta)$　　z ：観測データ　θ ：パラメータ

$$f(\theta)=E(z\mid\theta)=\int zp(z\mid\theta)dz$$

結論から言えば・・・

$f(\theta^*)=0$　　となる θ^* が求める解

解を見つけるアルゴリズムが
　Robbins-Monro アルゴリズム

回帰関数の条件

$$E((z-f)^2 \mid \theta) < \infty$$

分散が有限、どんどん
離れていくデータはダメ

$$\left.\begin{array}{l} \theta < \theta^* \quad \Rightarrow \quad f(\theta) < 0 \\ \\ \theta > \theta^* \quad \Rightarrow \quad f(\theta) > 0 \end{array}\right\}$$

一般性を失わずに
この仮定は可能

Robbins-Monro のアルゴリズム

$$\theta^{(N)} = \theta^{(N-1)} - a_{N-1} z(\theta^{(N-1)})$$

s.t

$$\begin{cases} \lim_{N \to \infty} a_N = 0 \\ \sum_{N=1}^{\infty} a_N = \infty \\ \sum_{N=1}^{\infty} a_N^2 < \infty \end{cases}$$

例（ガウス分布の平均の推定）

$$\theta^{(N)} = \theta^{(N-1)} - a_{N-1} z(\theta^{(N-1)})$$

$$z \sim N\left(-\frac{\mu - \mu_{ML}}{\sigma^2}, 1^2\right) \qquad a_N = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{ML}^{(N)} = \mu_{ML}^{(N-1)} + \frac{1}{N}(x_n - \mu_{ML}^{(N-1)})$$