

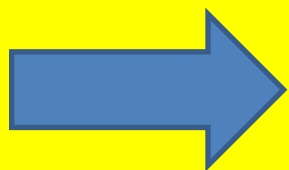
「パターン認識と機械学習」

2-3-2 周辺ガウス分布

新納浩幸

本節で示すこと

同時分布 $p(x_a, x_b)$ がガウス分布



周辺分布 $p(x_a)$ もガウス分布

$$p(x_a) = \int p(x_a, x_b) dx_b$$

$p(x_a)$ の平均と分散

μ_a と Σ_{aa} を求める

証明

$$p(x_a) = \int p(x_a, x_b) dx_b \quad \text{を示せば良い}$$

$p(x_a, x_b)$ の分布は $N(x | \mu, \Sigma)$

$$x = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{pmatrix}$$

すみません・・・

めんどくさくて式の変形を確認していません
やっていることは x_b に注目して、
積分消去しています

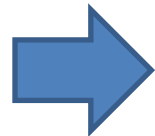
最終的に残った x_a の式からガウス分布で
あることが言えます

またその式から周辺分布の平均と分散も出ます

μ_a はすぐ求まる

$$\Sigma_a = (\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab} \Lambda_{bb}^{-1} \Lambda_{ba})^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}$$

 $(\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})^{-1} = \Sigma_{aa}$

線形代数学の役立つ公式

ブロック行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M & -MBD^{-1} \\ -D^{-1}CM & D^{-1} + D^{-1}CMBD^{-1} \end{pmatrix}$$

where $M = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ 式(Matrix⁻¹)

例えば、多次元正規分布の共分散行列やその逆行列(精度行列)を求めるときに必須

<http://www.r.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/~nakagawa/SML1/math1.pdf>

中川先生の講義資料は役立ちます