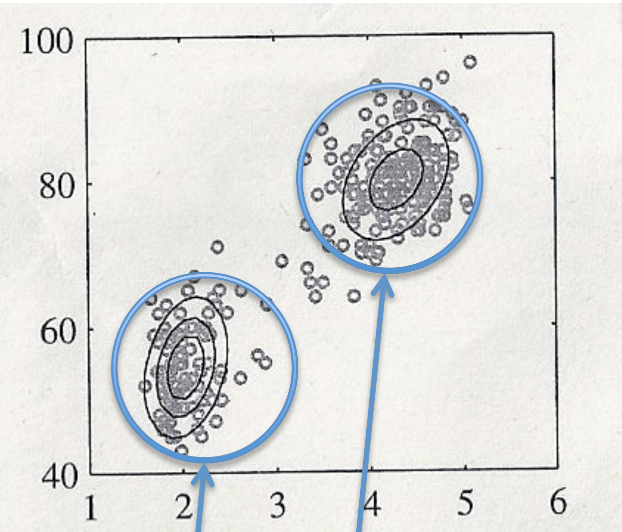
# 「パターン認識と機械学習」
# 2.3.9 混合ガウス分布

小野寺喜行

# Old Faithful間欠泉データ




2つのかたまり

単一のガウス分布で表現

2つのガウス分布の線形結合で表現

よりうまく特徴を表せる

# 混合ガウス分布

<u>複数のガウス分布を線形結合した分布</u>

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \underbrace{N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}_{\boxed{\text{混合要素}}} \quad (K\text{:ガウス分布の数})$$

個別に平均$\boldsymbol{\mu}_k$と共分散$\boldsymbol{\Sigma}_k$のパラメータを持つ

# 混合係数$\pi_k$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \;\longrightarrow\; \underline{\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1}$$

両辺を**x**について積分

$N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \geq 0$ より $\pi_k \geq 0$

$\underline{0 \leq \pi_k \leq 1}$

**<u>確率の条件を満たしている</u>**

# $\mathbf{x}$の周辺密度

<u>$k$番目の混合要素を選択する事前確率</u>

$\Rightarrow$ $\pi_k = p(k)$

<u>$k$が与えられたときの$\mathbf{x}$の条件付き密度</u>

$\Rightarrow$ $N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) = p(\mathbf{x} \mid k)$

$\Downarrow$ このときの$\mathbf{x}$の周辺密度

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} p(k)\, p(\mathbf{x} \mid k)$$

# 負担率

事後分布 $p(k \mid \mathbf{x})$

**負担率（responsibility）**

$$\gamma_k(\mathbf{x}) \equiv p(k \mid \mathbf{x})$$

$$= \frac{p(k)\,p(\mathbf{x} \mid k)}{\sum_l p(l)\,p(\mathbf{x} \mid l)}$$

$$= \frac{\pi_k N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}{\sum_l \pi_l N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}_l, \boldsymbol{\Sigma}_l)}$$

# 対数尤度関数

パラメータ

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \left\{\pi_1, \ldots, \pi_K\right\}, \boldsymbol{\mu} \equiv \left\{\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_K\right\}, \boldsymbol{\Sigma} \equiv \left\{\boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}_K\right\}$$

これらの値をもとめる為に用いる

$\mathbf{X} \equiv \left\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K\right\}$についての対数尤度関数

$$\ln p\left(\mathbf{X} \mid \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln \left\{ \sum_{k=1}^{K} \pi_k N\left(\mathbf{x}_n \mid \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k\right) \right\}$$