

# 「パターン認識と機械学習」

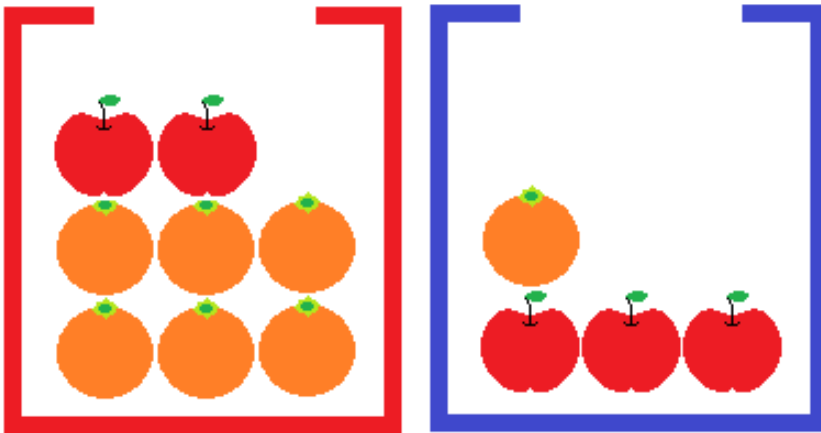
## 1.2 確率論

小野寺喜行

# 確率論

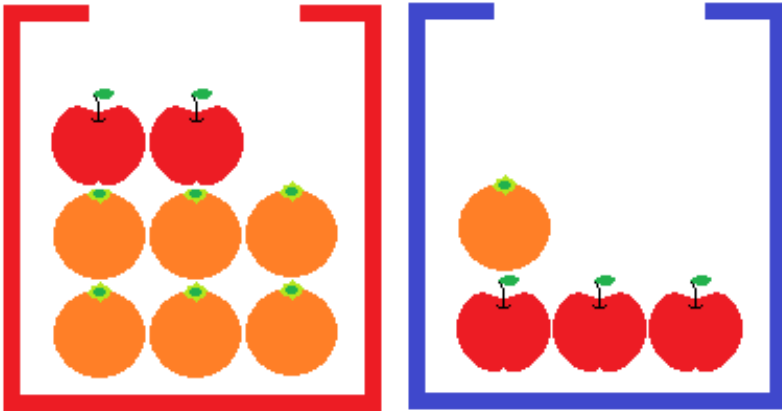
- 不確実性に関する定量化と操作に関して一貫した枠組みを与える。
- 決定理論と組み合わせることで、不完全で曖昧な情報でも、最適な予測をすることが可能となる。

# 例



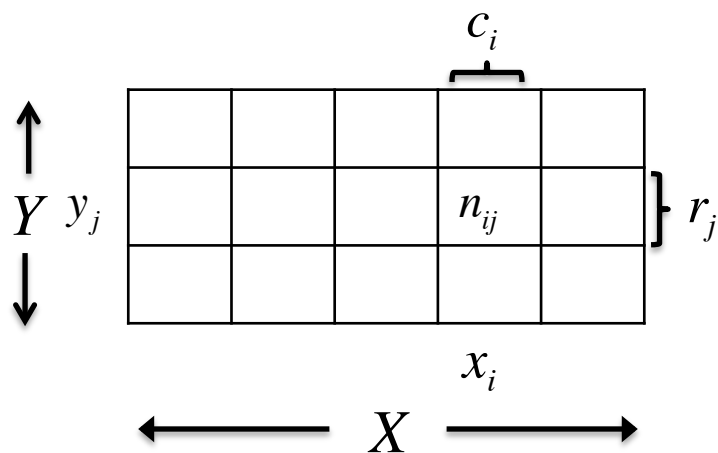
- 箱と果物をランダムに選び、どの果物だったか記録して元の箱に戻すことを繰り返す。
- 箱は赤40%、青60%の確率で選ぶ
- 果物はそれぞれ同確率

# 例



- 確率変数B : 箱を選ぶ確率、r : 赤、b : 青
- 確率変数F : 果物を選ぶ確率、a : りんご、o : オレンジ
- $P(B=r) = 4/10$
- $P(B=b) = 6/10$

# 確率の法則の導出



- 左図に示す2つの確率変数 $X, Y$ からなる、少し一般化した設定を考える

# 確率の法則の導出

- 確率変数 $X$  : 値  $x_i (i = 1, \dots, M)$  をとる。
- 確率変数 $Y$  : 値  $y_j (j = 1, \dots, L)$  をとる。
- $n_{ij} : X = x_i, Y = y_j$  となる回数。
- $c_i : X = x_i$  となる回数。
- $r_j : Y = y_j$  となる回数。
- $N$  : 全試行回数。

# 確率の法則の導出

- 同時確率

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N}$$

- $X = x_i$  となる確率

$$p(X = x_i) = \frac{c_i}{N}$$

- $c_i = n_{i1} + \dots + n_{iL} = \sum_j n_{ij}$

# 確率の法則の導出

- 確率の加法定理

$$p(X = x_i) = \sum_{j=1}^L p(X = x_i, Y = y_j)$$

# 確率の法則の導出

- $X = x_i$  のとき  $Y = y_j$  となる確率 (条件付き確率)

$$p(Y = y_j | X = x_i) = \frac{n_{ij}}{c_i}$$

# 確率の法則の導出

- 確率の乗法定理

$$\begin{aligned} p(X = x_i, Y = y_j) &= \frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{ij}}{c_i} \cdot \frac{c_i}{N} \\ &= p(Y = y_j | X = x_i) p(X = x_i) \end{aligned}$$

# 確率の基本法則

- 加法定理

$$p(X) = \sum_Y p(X, Y)$$

- 乗法定理

$$p(X, Y) = p(Y | X)p(X)$$

# ベイズの定理

- ベイズの定理：乗法定理および対称性

$$p(X, Y) = p(Y, X) \text{ より}$$

$$p(Y | X) = \frac{p(X | Y)p(Y)}{p(X)}$$

- 加法定理より、

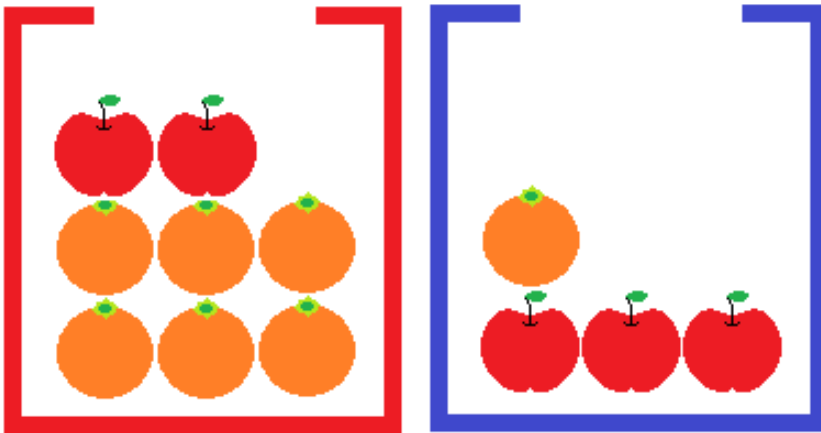
$$p(X) = \sum_Y p(X | Y)p(Y)$$

# ヒストグラム

- ある確率分布から生成した有限個の点だけが与えられたとき、もとの確率分布をモデル化する単純な方法。
- データから分布をモデル化することは統計的パターン認識の中心をなすもの。

# 例のつづき

- $p(B = r) = 4 / 10$
- $p(B = b) = 6 / 10$
- 青い箱を選んだとき、  
林檎を選ぶ確率



$$p(F = a | B = b) = 3 / 4$$

# 例のつづき

- $p(F = a \mid B = r) = 1/4$
- $p(F = o \mid B = r) = 3/4$
- $p(F = a \mid B = b) = 3/4$
- $p(F = o \mid B = b) = 1/4$
- $p(F = a \mid B = r) + p(F = o \mid B = r) = 1$
- $p(F = a \mid B = b) + p(F = o \mid B = b) = 1$

# 例のつづき

- 加法・乗法定理より、りんごを選ぶ確率は

$$p(F = a)$$

$$= p(F = a | B = r)p(B = r) + p(F = a | B = b)p(B = b)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{11}{20}$$

- オレンジを選ぶ確率

$$p(F = o) = 1 - 11 / 20 = 9 / 20$$

# 例のつづき

- ベイズの定理より、オレンジを選んだとき、それが赤い箱から取り出されたものである確率は

$$p(B = r | F = o) = \frac{p(F = o | B = r)p(B = r)}{p(F = o)}$$

- 同じく、青い箱から取り出されたものである確率は

$$p(B = b | F = o) = 1 - 2/3 = 1/3$$

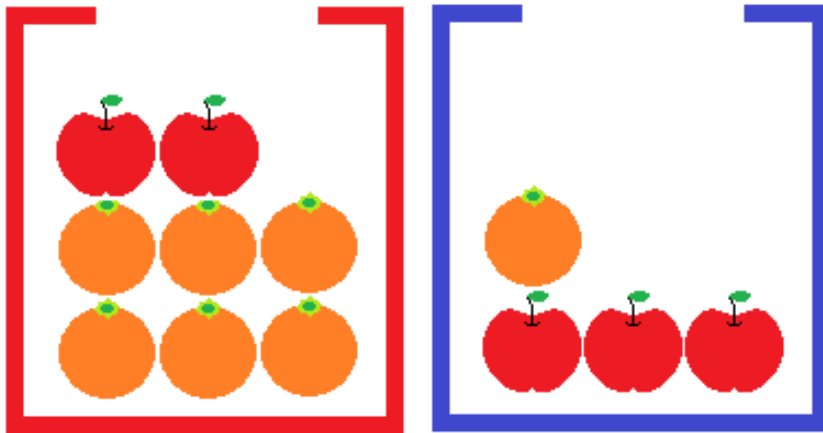
# 事前確率

- 例)選んだ果物を知る前に、選んだ箱を訪ねられたら、最も完全な情報は $p(B)$ で与えられる。
- どれを選んだかを観測するより事前に得られる確率値。

# 事後確率

- 例)選んだ果物がオレンジだと分かると、ベイズの定理を使って、選んだ箱の確率 $p(B|F)$ を得られる。
- 観測した事後の確率。

# 例



- 赤い箱を選ぶ事前確率 :  $4/10$
- 選んだ果物がオレンジだと分かったときの赤い箱を選ぶ事後確率 :  $2/3$

# 独立

- $p(X, Y) = p(X)p(Y)$  となるとき、 $X$ と $Y$ は独立であるという。
- 乗法定理より  $p(Y | X) = p(Y)$  となる。
- $X$ が与えられた下での $Y$ の条件付き確率は $X$ の値に独立になる。

# 例

- 赤、青の各箱に同じ比率でりんごとオレンジが入っているとする。
- りんごが選ばれる確率はどの箱が選ばれたかに独立となる。