第８章　モデル比較

茨城大学工学部情報工学科
菊池　裕紀

8.1　はじめに

- 本章の内容
  - Rを使い、ベイズの観点からモデルを比較する方法を紹介する。
    - ベイズファクター
      - あるパラメータについて二つの仮説を比較する方法。
      - 片側仮説、両側仮説の両方についての計算方法を説明。

8.2　仮説の比較 (1)

- ベイズ統計量の導入 (証拠の検証のため)
  - サンプリング分布 $f(y \mid \theta)$ からYを観測する。

    ここで、次の仮説をたてる。

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad , \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

※Θ_0 , Θ_1 が パ ラ メ ー タ 空間を 分割 し て い る。

  - 仮に正則事前密度 $g(\theta)$ を割り当てるとする…

    仮説を事前オッズ比であらかじめ判断できる。

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{P(\theta \in \Theta_0)}{P(\theta \in \Theta_1)} = \frac{\int_{\Theta_0} g(\theta)\, d\theta}{\int_{\Theta_1} g(\theta)\, d\theta}$$

8.2　仮説の比較 (2)

- データY=yが観測されると…
  パラメータに関する確信は事後密度で更新される
  - $g(\theta \mid y) \propto L(\theta) g(\theta)$
    ※L(θ)は尤度関数
  - 仮説についての新しい確信は…
    $$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{P(\theta \in \Theta_0 | y)}{P(\theta \in \Theta_1 | y)} = \frac{\int_{\Theta_0} g(\theta|y) d\theta}{\int_{\Theta_1} g(\theta|y) d\theta}$$
    という事後オッズ比で要約される。

8.2　仮説の比較 (3)

- ベイズファクター(BF)
  - 仮説の事前オッズに対する事後オッズ

$$BF = \frac{\text{事前オッズ}}{\text{事後オッズ}} = \frac{p_0 / p_1}{\pi_0 / \pi_1}$$

  - 統計量BF = 仮説 H_0 を支持する度合いの基準

    仮説 H_0 の事後確率

    →ベイズファクターと仮説の事後確率の関数

$$p_0 = \frac{\pi_0 BF}{\pi_0 BF + 1 - \pi_0}$$

8.3　正規平均の片側検定 (1)

- 例：体重の測定
  - ばらつきのある体重計で10回の測定を行う

    182 , 172 , 173 , 176 , ...(単位:pound)

    ※測定値は標準偏差σの正規分布に従うとする。
  - ここで標準偏差σ=3と分かっているとして…

    測定者の真の体重μが175を超えるかを判定する。

    →片側仮説を検定する！

$$H_0 : \mu \leq 175 \quad , \quad H_1 : \mu > 175$$

8.3　正規平均の片側検定 (2)

測定者は新の体重の事前確信がほとんどない

- μに平均170、標準偏差５の正規事前密度
- 帰無仮説 H_0 の事前オッズは以下となる。

$$\frac{\pi_0}{\pi_1}=\frac{P(\mu\leq 175)}{P(\mu>175)}$$

```
> pmean <- 170; pvar <- 25
> probH <- pnorm(175, pmean, sqrt(pvar))
> probA <- 1 - probH
> prior.odds <- probH/probA
> prior.odds
[1] 5.302974  →対立仮説の５倍以上確からしい
```

8.3　正規平均の片側検定 (3)

次に、10回の測定値から標本平均 $\bar{y}$ と σ^2/n に等しいサンプリング分散 sigma2 を計算する。

```
> weights <- c(182,172,173,176,176,180,173,174,179,175)
> ybar <- mean(weights)
> sigma2 <- 3^2/length(weights)
> post.precision <- 1/sigma2 + 1/pvar   …[1]
> post.var <- 1/post.precision
> post.mean <- (ybar/sigma2 + pmean/pvar)/post.precision
> c(post.mean,sqrt(post.var))   …[2]
[1] 175.7915058   0.9320546
```

[1]…μの事後精度はデータと事前分布の精度の合計となる。

[2]…μの事後平均は、標本平均と事前平均の重み付き平均。
また重みはそれぞれ精度に比例する。

8.3　正規平均の片側検定 (4)

よってμの事後密度は…N(175.79,0.93)となる。

この正規事後密度を使って帰無仮説のオッズを計算する

```
> post.odds <- pnorm(175,post.mean,sqrt(post.var))/
+ (1-pnorm(175,post.mean,sqrt(post.var)))
> post.odds
[1] 0.2467017
```

帰無仮説を支持するベイズファクター

```
> BF <- post.odds/prior.odds
> BF
[1] 0.04652139
```

8.3　正規平均の片側検定 (6)

H_0 の伝統的な検定：　$z = \dfrac{\sqrt{2}\left(\bar{y} - 175\right)}{3}$

頻度主義的p値 → 標準正規変量がzを超える確率

```
> z<-sqrt(length(weights)) * (mean(weights) - 175)/3
> 1 - pnorm(z)
[1] 0.1459203
```

– 平均170、標準偏差100の事前分布

→ベイズ法による分析を繰り返す

LearnBayesパッケージのmnort.onesided()で計算を行う。

8.3　正規平均の片側検定 (7)

```
> weights<-c(182,172,173,176,176,180,173,174,179,175)
> data <- c(mean(weights),length(weights),3)
> prior.par <- c(170,1000)
> mnormt.onesided(175,prior.par,data)
$BF
[1] 0.1694947

$prior.odds
[1] 1.008011

$post.odds
[1] 0.1708525

$postH
[1] 0.1459215
```

→ 帰無仮説

帰無仮説の確率がp値にほぼ等しい。

→パラメータに曖昧な事前分布を割り当てる場合、仮説に関するベイズ法による確率は、片側検定問題に対するp値に等しくなる。

8.4　正規平均の両側検定 (1)

- 仮説の両側検定
  - 正規分布の平均が特定の値に等しいとする。
  - (事例) 計測者の昨年と今年の体重に変化が無いかどうか。

    帰無仮説　H_0：体重が170に等しい

    対立仮説　H_1：体重が増えるか減るかしている

    →被験者の体重は昨年と変化していない見込みがあるとしてμ=170、という命題に確率0.5のを割り当てる。

8.4　正規平均の両側検定 (2)

- 仮説 H_0 が真でない場合のμの値の検討

  →平均 μ_0 で標準偏差 τ の正規分布

一般に標準偏差σが既知の場合

- 帰無仮説 $H_0\colon \mu=\mu_0$ を対立仮説 $H_1\colon \mu\neq\mu_0$ に対して検討する。

ここで仮説 H_0 を支持するBFは…

$$BF=\frac{\dfrac{n^{1/2}}{\sigma}\exp\left\{-\dfrac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu_0)^2\right\}}{(\sigma^2/n+\tau^2)^{-1/2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(\sigma^2/n+\tau^2)}(\bar{y}-\mu_0)^2\right\}}$$

8.4　正規平均の両側検定 (3)

仮にπ_0が $\mu=\mu_0$という帰無仮説 H_0 の事前確率と表すとすれば、H_0の事後確率は…

$$p_0=\frac{\pi_0 BF}{\pi_0 BF+1-\pi_0}$$

BFを計算する

→対立仮説のもとで正規密度の標準偏差τを入力する必要がある。

τの決め方

→μに対する対立仮説の範囲から、正規分布の95%幅である4τをその範囲に定めて求める。

8.4　正規平均の両側検定 (4)

（例）

- 測定者の体重が昨年170ポンドから5ポンド前後の増減が会ったとすると…

→μの対立仮定の範囲：175 – 165 = 10

4τ = 10　　より　　τ=2.5

計算：LearnBayesのmnormt.twosided()関数を使用

引数：検定対象の μ_0 の値
帰無仮説 H_0 の事前確率 π_0
事前標準偏差 τ
データ値

8.4　正規平均の両側検定 (5)

```
> weights <- c(182,172,173,176,176,180,173,174,179,175)
> data <- c(mean(weights),length(weights),3)
> t<-c(.5,1,2,4,8)
> mnormt.twosided(170,.5,t,data)

$bf
[1] 1.462146e-02 3.897038e-05 1.894326e-07 2.591162e-08
2.309739e-08

$post
[1] 1.441076e-02 3.896887e-05 1.894325e-07 2.591162e-08
2.309739e-08
```

$bf ：事前標準偏差の各候補の値に対して、μが特定の値をとるとする仮説を支持するベイズファクターの値。

$post ：仮説 H_0 が真である事後確率