章末問題 1-7 の解答 (新納)

$\theta = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ とおく。ラグランジュ乗数法より、

$$L(\theta, \lambda) = -\sum_i a_i x_i^2 + \lambda(\sum_i b_i x_i - 1)$$

とおくとき、L の鞍点 $\hat{\theta}, \hat{\lambda}$ を求めることで、$-\sum_i a_i x_i^2$ の最大値 $-\sum_i a_i \hat{x_i}^2$ が求まる。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -2a_i x_i + \lambda b_i$$

より、$-2a_i \hat{x_i} + \lambda b_i = 0$ よって $\hat{x_i} = \frac{b_i \lambda}{2a_i}$ これを $L(\theta, \lambda)$ に代入する。

$$\begin{aligned}
L(\hat{\theta}, \lambda) &= -\sum_i a_i \hat{x_i}^2 + \lambda(\sum_i b_i \hat{x_i} - 1) \\
&= -\sum_i a_i \left(\frac{b_i \lambda}{2a_i}\right)^2 + \lambda \left(\sum_i b_i \frac{b_i \lambda}{2a_i} - 1\right) \\
&= -\lambda^2 \sum_i \frac{b_i^2}{4a_i} + \lambda^2 \sum_i \frac{b_i^2}{2a_i} - \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_i \frac{b_i^2}{4a_i} - \lambda
\end{aligned}$$

これを最小にする $\lambda = \hat{\lambda}$ は

$$\frac{\partial L(\hat{\theta}, \lambda)}{\partial \lambda} = 2\lambda \sum_i \frac{b_i^2}{4a_i} - 1$$

より、

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2\sum_i \frac{b_i^2}{4a_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{b_i^2}{2a_i}}$$

これを $\hat{x_i} = \frac{b_i \lambda}{2a_i}$ に代入して、

$$\hat{x_i} = \frac{b_i \hat{\lambda}}{2a_i} = \frac{b_i}{2a_i \sum_i \frac{b_i^2}{2a_i}} = \frac{b_i}{a_i \sum_i \frac{b_i^2}{a_i}}$$

のときに目的関数は最大となる。最大値は

$$-\sum_i a_i \left(\frac{b_i}{a_i \sum_i \frac{b_i^2}{a_i}}\right)^2 = -\sum_i \frac{b_i^2}{a_i} \left(\frac{1}{\sum_i \frac{b_i^2}{a_i}}\right)^2 = -\frac{1}{\sum_i \frac{b_i^2}{a_i}}$$