

章末問題 1-4 の解答 (新納)

$\forall x^{(1)}, \forall x^{(2)}, \forall t \in (0, 1)$ に対して、 $y = tx^{(1)} + (1-t)x^{(2)}$ とする。仮定より、

$$f(x^{(2)}) - f(y) \geq f'(y)(x^{(2)} - y) = tf'(y)(x^{(2)} - x^{(1)}) \quad (1)$$

$$f(x^{(1)}) - f(y) \geq f'(y)(x^{(1)} - y) = -(1-t)f'(y)(x^{(2)} - x^{(1)}) \quad (2)$$

(1) 式の両辺に $1-t (\geq 0)$ をかけ、(2) 式の両辺に $t (\geq 0)$ をかけ、それぞれの辺で和を取ると、

$$(1-t)(f(x^{(2)}) - f(y)) + t(f(x^{(1)}) - f(y)) \geq 0$$

以上より

$$tf(x^{(1)}) + (1-t)f(x^{(2)}) \geq tf(y) + (1-t)f(y) = f(y) = f(tx^{(1)} + (1-t)x^{(2)})$$

よって関数 f は上に凸である。