

## 章末問題 1-13 の解答 (新納)

$\theta = (p_{good}, p_{bad}, p_{exciting}, p_{boring})$  とおく。テキスト p.47 の解説に従うと、

$$L(\theta, \lambda) = \log P(\theta) + \sum_w n_w \log p_w + \lambda \left( \sum_w p_w - 1 \right)$$

を最大化すれば良い。題意より、 $P(\theta) = a \prod_w p_w^{\alpha-1}$  なので、

$$L(\theta, \lambda) = \log a + (\alpha - 1) \sum_w \log p_w + \sum_w n_w \log p_w + \lambda \left( \sum_w p_w - 1 \right)$$

極値条件より

$$\frac{\partial L}{\partial p_w} = \frac{\alpha - 1}{p_w} + \frac{n_w}{p_w} + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_w p_w - 1 = 0 \quad (2)$$

これらの式を連立させる。(1) 式より

$$\alpha - 1 + n_w = -\lambda p_w \quad (3)$$

両辺を  $w$  で和をとって、(2) 式を利用する。 $w$  の個数は 4 であることと、 $n_w$  の総和が  $N$  であることに注意すると、

$$-\lambda = N + 4(\alpha - 1)$$

これを (3) 式に代入して、

$$p_w = \frac{n_w + \alpha - 1}{N + 4(\alpha - 1)}$$