

## 章末問題 1-5 の解答 (佐々木)

1 変数関数  $f(x)$  が凸関数であるかどうかを示すためには、2階微分  $f''(x)$  が 0 以下であれば上に凸、2階微分  $f''(x)$  が 0 以上であれば下に凸であることを利用する。

- (1) 定数関数  $f(x)$  の2階微分は  $f''(x) = 0$  である。そのため、 $f''(x)$  が 0 以上でもあり、0 以下でもあるので、定数関数は上にも下にも凸の関数である。
- (2) 対数関数  $f(x) = \log x$  の2階微分は  $f''(x) = -1/x^2$  である。そのため、 $x \in R^+$  において、 $f''(x)$  は 0 以下の値をもつ。したがって、対数関数  $f(x) = \log x$  は上に凸の関数である。
- (3) 指数関数  $f(x) = e^x$  の2階微分は  $f''(x) = e^x$  である。このとき、どの  $x$  の値でも  $f''(x) > 0$  となるので、指数関数  $f(x) = e^x$  は下に凸の関数である。
- (4) 2次関数  $f(x) = ax^2$  の2階微分は  $f''(x) = 2a$  である。このとき、 $a \leq 0$  ならば  $f''(x) \leq 0$  となり、上に凸の関数となる。また、 $a \geq 0$  ならば  $f''(x) \geq 0$  となり、下に凸の関数となる。