3.3 カーネルFisher判別分析

10NM706F　江口晃

3.3.1 Fisherの線形判別分析(1)

- Fisher線形判別分析

  X:説明関数

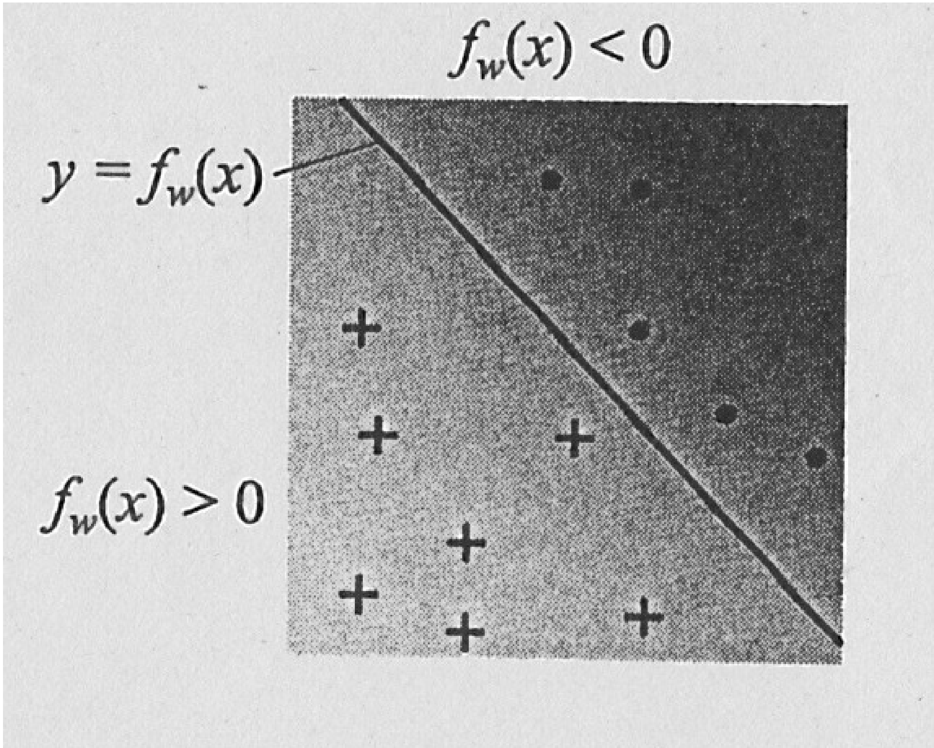
  Y:+1,-1のクラスを表す2値変数

  線形判別関数:

$$f(x) = \mathrm{sgn}\left(w^T x + b\right)$$

与えられたXに対するクラスYを予測する問題を考える

線形判別



3.3.1 Fisherの線形判別分析(2)

$$J(w) = \frac{w\text{方向のクラス間分散}}{w\text{方向のクラス内分散の和}} = \frac{w^T S_B w}{w^T S_W w}$$

J(w)を最大にするようにwを決定する。

SB,SWは以下のように定義される

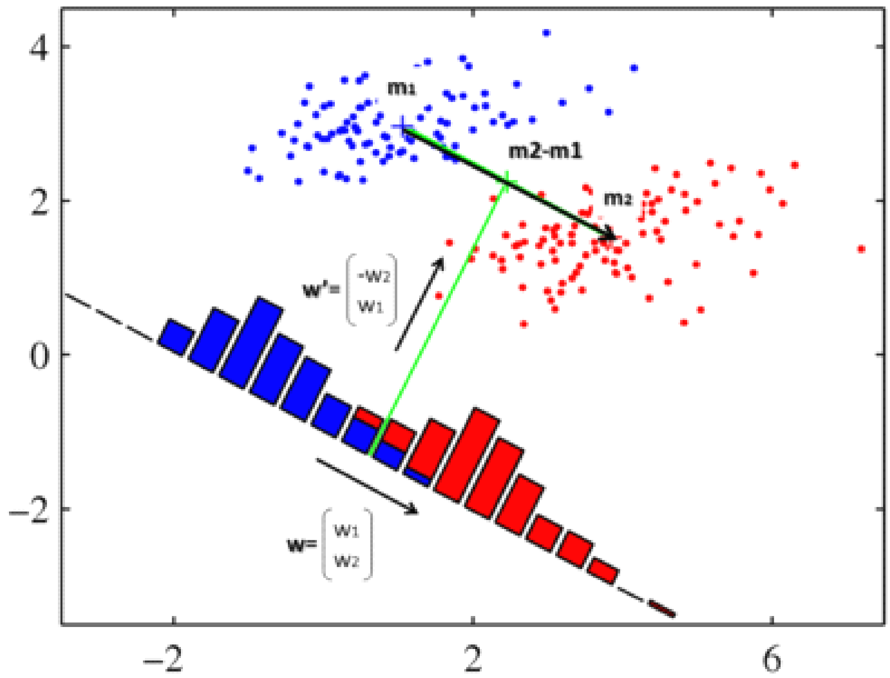
$$\mu_+ = \frac{1}{N_+} \sum_{i:Y_i=+1} X_i$$

$$\mu_- = \frac{1}{N_-} \sum_{j:Y_j=-1} X_j$$

$$S_B = (\mu_+ - \mu_-)(\mu_+ - \mu_-)^T,$$

$$S_W = \sum_{i:Y_i=+1} (X_i - \mu_+)(X_i - \mu_+)^T + \sum_{j:Y_j=-1} (X_j - \mu_-)(X_j - \mu_-)^T$$

Fisherの線形判別分析(1)

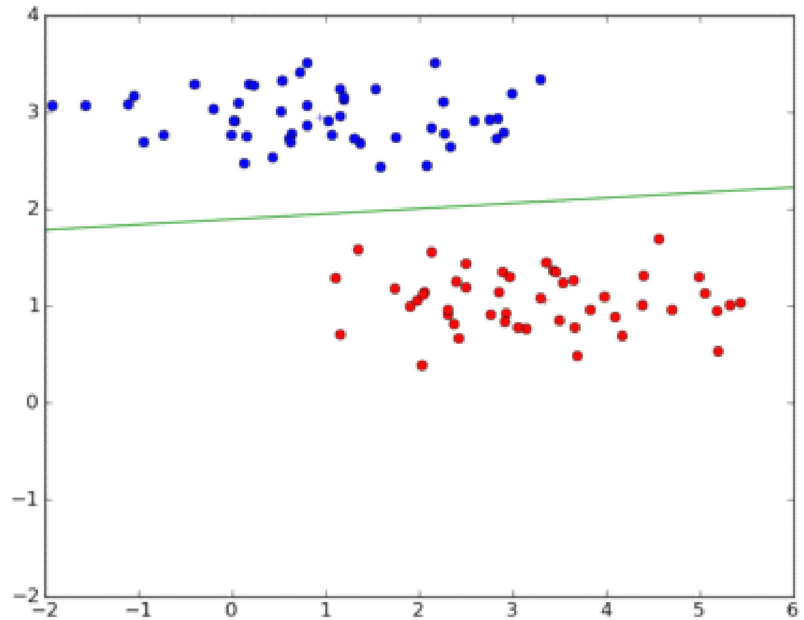


J(w)の最大化は一般化固有値問題の解として容易に解くことができる。

判別関数を決めるための定数項bは以下の式で与えられる。

$$b = \frac{1}{2} w^T (\mu_+ + \mu_-)$$

Fisherの線形判別分析(2)



3.3.2 カーネルFisher判別分析(1)

- カーネルFisher判別分析

  Xi:可変集合，Yi:確率変数

  正定値カーネル:k，特徴写像:ϕ

  再生核ヒルベルト空間:H

  線形判別関数:

$$f(x) = \operatorname{sgn}\big(\langle h, \Phi(x)\rangle + b\big) = \operatorname{sgn}(h(x) + b)$$

3.3.2 カーネルFisher判別分析(2)

Fisher線形判別分析と同様に以下を尺度として採用する。

$$J^{\Phi}(h) = \frac{h \text{ 方向のクラス間分散}}{h \text{ 方向のクラス内分散の和}}$$

$$= \frac{\langle h, \mu_+^{\Phi} - \mu_-^{\Phi} \rangle^2}{\sum_{i:Y_i=+1} \langle h, \Phi(X_i) - \mu_+^{\Phi} \rangle^2 + \sum_{j:Y_j=-1} \langle h, \Phi(X_j) - \mu_-^{\Phi} \rangle^2} \quad (3.13)$$

$$h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Phi(X_i)$$

を用い式変形すると

$$\tilde{J}^{\Phi}(\alpha) = \frac{\alpha^T S_B^{\Phi} \alpha}{\alpha^T (S_W^{\Phi} + \lambda I_N) \alpha} \quad (3.15)$$

3.3.2 カーネルFisher判別分析(2)

通常のFisher線形判別問題と同様に、α は一般化固有値問題の最大固有値問題で求めることができる。

定数項bをFisher線形判別分析と同様に定めることができる。

$$b = \frac{1}{2}\langle h, \mu_+^\Phi + \mu_-^\Phi \rangle = \sum_{t=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{1}{N_+} \sum_{i:Y_i=+1} k(X_i, X_t) + \frac{1}{N_+} \sum_{j:Y_j=-1} k(X_j, X_t) \right)$$