- 線形カーネル　　$k_0(x,y) = x^T y$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j k_0(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j x_i^T x_j \\ &= (\sum_{i=1}^{n} c_i x_i)^T (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j) \geq 0\end{aligned}$$

  よって、$k_0(x,y)$ は正定値。

- 指数型　　$k_E(x,y) = \exp(\beta x^T y)$
  指数関数の $\mathbf{R}$ 上のべき級数展開から、

$$\exp(\beta x^T y) = 1 + \beta x^T y + \frac{\beta^2}{2!}(\beta x^T y)^2 + \frac{\beta^3}{3!}(\beta x^T y)^3 + \cdots$$

  が任意の $x, y \in \mathbf{R}^m$ について成立。
  ここで第 n 項までの和で定まるカーネルは、命題 2.2 の

$$\begin{aligned}&(1) \quad ak_1 + bk_2 \qquad (a, b \geq 0) \\ &(2) \quad k_1 k_2 \qquad (\text{積は値による積 } k_1(x,y)k_2(x,y)) \\ &(3) \quad \lim_{i \to \infty} k_i(x,y) \qquad (\text{極限の存在を仮定})\end{aligned}$$

  のうち、(1), (2) より、正定値である。
  $\exp(\beta x^T y)$ はこの極限であるので、(3) から正定値となる。

- ガウス RBF カーネル　　$k_G(x,y) = \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x-y\|^2)$　　$(\sigma > 0)$
  $\|x-y\|^2 = x^T x - 2x^T y + y^T y$ から、

$$\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x-y\|^2) = \exp(-\frac{x^T x}{2\sigma^2})\exp(-\frac{x^T y}{\sigma^2})\exp(-\frac{y^T y}{2\sigma^2})$$

  k_E の正定値性から、$\exp(-\frac{x^T y}{\sigma^2})$ は正定値カーネル。
  命題 2.5(2) から、$\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x-y\|^2)$ は正定値カーネルである。

- 多項式カーネル　　$k_P(x,y) = (x^T y + c)^d$　　$(c \geq 0, d \in \mathbf{N})$
  $x^T y$ は正定値のため、
  　$\Rightarrow x^T y + c$ は正定値　　$(c \geq 0)$
  　$\Rightarrow (x^T y + c)^d$ も正定値　　(d 個の積)