06t4027h 斎藤高行

固有値分解(補足)

- 対角化、固有値、固有ベクトル
- 対称行列の性質
- 固有値分解

固有値、固有ベクトル (1)

n 次正方行列 A と相似な行列は、基底に関する表現行列でもある

変換行列 $X = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n \right]$ のとき

$$X^{-1} A X = diag\left\{ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \right\}$$

固有値、固有ベクトル (2)

$$X^{-1}AX = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow AX = Xdiag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow A[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

固有値、固有ベクトル (3)

行列 A について $Ax = \lambda x$ を満たす $x(\neq 0)$ が存在するとき

λ は A の固有値である。
x は A の固有ベクトルである。

対角化

A が対角行列と相似である場合、
A は対角化可能であるという

対角化の必要十分条件

n 次正方行列 A が対角化可能

n 個の一次独立である固有ベクトル

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の存在

対称行列の性質

- 行列 A が対称行列のとき $A = A^T$ が成立

- 対称行列の固有ベクトルは互いに直交する (証明する)

- 対称行列は常に対角化可能である

証明

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ を A の固有値とする

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

左から $x_2{}^T$， $x_1{}^T$ を掛ける

$$x_2{}^T A x_1 = \lambda_1 x_2{}^T x_1$$

$$x_1{}^T A x_2 = \lambda_2 x_1{}^T x_2$$

証明(続き)

$A = A^T$ より

$$x_2{}^T A^T x_1 = \lambda_1 x_2{}^T x_1$$

転置行列の性質 $\left(BC\right)^T = C^T B^T$ より

$$x_1{}^T A x_2 = \lambda_1 x_1{}^T x_2$$

証明(続き)

$$x_1^T A x_2 = \lambda_1 x_1^T x_2$$

$$x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2 \quad \text{より}$$

$$\lambda_1 x_1^T x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^T x_2 = 0$$

証明(続き)

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから $x_1^T x_2 = 0$ (証明終)

つまり、$A = A^T$ が成立する場合は

$X^T X = I_n$ が成立する

すなわち、$X^T = X^{-1}$

対称行列の固有値分解 (1)

- n 次正方行列 $\hat{\Sigma}_y$ が対称行列となるとき

$$\hat{\Sigma}\phi = \lambda\phi$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \lambda\phi\phi^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \lambda\phi\phi^{T}$$ ($X^T = X^{-1}$ より)

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n][\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n]^T$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \phi_j \phi_j^{T}$$

対称行列の固有値分解 (2)

$$\hat{\Sigma}\phi = \lambda\phi$$

$$\Leftrightarrow \phi = \lambda\hat{\Sigma}^{-1}\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\phi\phi^{-1} = \hat{\Sigma}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\phi\phi^{T} = \hat{\Sigma}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma}^{-1} = \sum_{j=1}^{d}\frac{1}{\lambda_j}\phi_j\phi_j^{T}$$