

# 固有値分解(補足)

- ・対角化、固有値、固有ベクトル
  - ・対称行列の性質
    - ・固有値分解

# 固有値、固有ベクトル (1)

$n$  次正方行列  $A$  と相似な行列は、基底に関する表現行列でもある

変換行列  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  のとき

$$X^{-1}AX = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

## 固有値、固有ベクトル (2)

$$X^{-1}AX = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow AX = X\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow A[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Leftrightarrow Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

# 固有値、固有ベクトル (3)

行列  $A$  について  $Ax = \lambda x$  を満たす  $x (\neq 0)$  が存在するとき

$\lambda$  は  $A$  の固有値である。

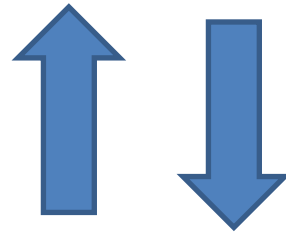
$x$  は  $A$  の固有ベクトルである。

# 対角化

$A$  が対角行列と相似である場合、  
 $A$  は対角化可能であるという

# 対角化の必要十分条件

$n$  次正方行列  $A$  が対角化可能



$n$  個の一次独立である固有ベクトル  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  の存在

# 対称行列の性質

- 行列  $A$  が対称行列のとき  $A = A^T$  が成立
- 対称行列の固有ベクトルは互いに直交する  
(証明する)
- 対称行列は常に対角化可能である

# 証明

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  を  $A$  の固有値とする

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

左から  $x_2^T$ ,  $x_1^T$  を掛ける

$$x_2^T Ax_1 = \lambda_1 x_2^T x_1$$

$$x_1^T Ax_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$$

# 証明(続き)

$A = A^T$  より

$$x_2^T A^T x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1$$

転置行列の性質  $(BC)^T = C^T B^T$  より

$$x_1^T A x_2 = \lambda_1 x_1^T x_2$$

# 証明(続き)

$$x_1^T A x_2 = \lambda_1 x_1^T x_2$$

$$x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2 \quad \text{より}$$

$$\lambda_1 x_1^T x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^T x_2 = 0$$

# 証明(続き)

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  であるから  $x_1^T x_2 = 0$  (証明終)

つまり、 $A = A^T$  が成立する場合は  
 $X^T X = I_n$  が成立する

すなわち、 $X^T = X^{-1}$

# 対称行列の固有値分解 (1)

- $n$  次正方行列  $\hat{\Sigma}_y$  が対称行列となるとき

$$\hat{\Sigma} \phi = \lambda \phi$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \lambda \phi \phi^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \lambda \phi \phi^T \quad (X^T = X^{-1} \text{ より})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \sum_{j=1}^d \lambda_j \phi_j \phi_j^T$$

# 対称行列の固有値分解 (2)

$$\hat{\Sigma} \phi = \lambda \phi$$

$$\Leftrightarrow \phi = \lambda \hat{\Sigma}^{-1} \phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \phi \phi^{-1} = \hat{\Sigma}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \phi \phi^T = \hat{\Sigma}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma}^{-1} = \sum_{j=1}^d \frac{1}{\lambda_j} \phi_j \phi_j^T$$