第10章　ベイズ推定の数値計算法

10.1　モンテカルロ積分
10.2　重点サンプリング法

03T4027N　佐々　知広

モンテカルロ積分

乱数を用いた数値的な積分の近似法の一つ。

期待値の形で表される積分　$\int g(\theta)p(\theta)d\theta$

を$p(\theta)$ からのi.i.d.標本$\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ を用いて、

$\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} g(\theta_i)$　で近似する方法である。

モンテカルロ積分

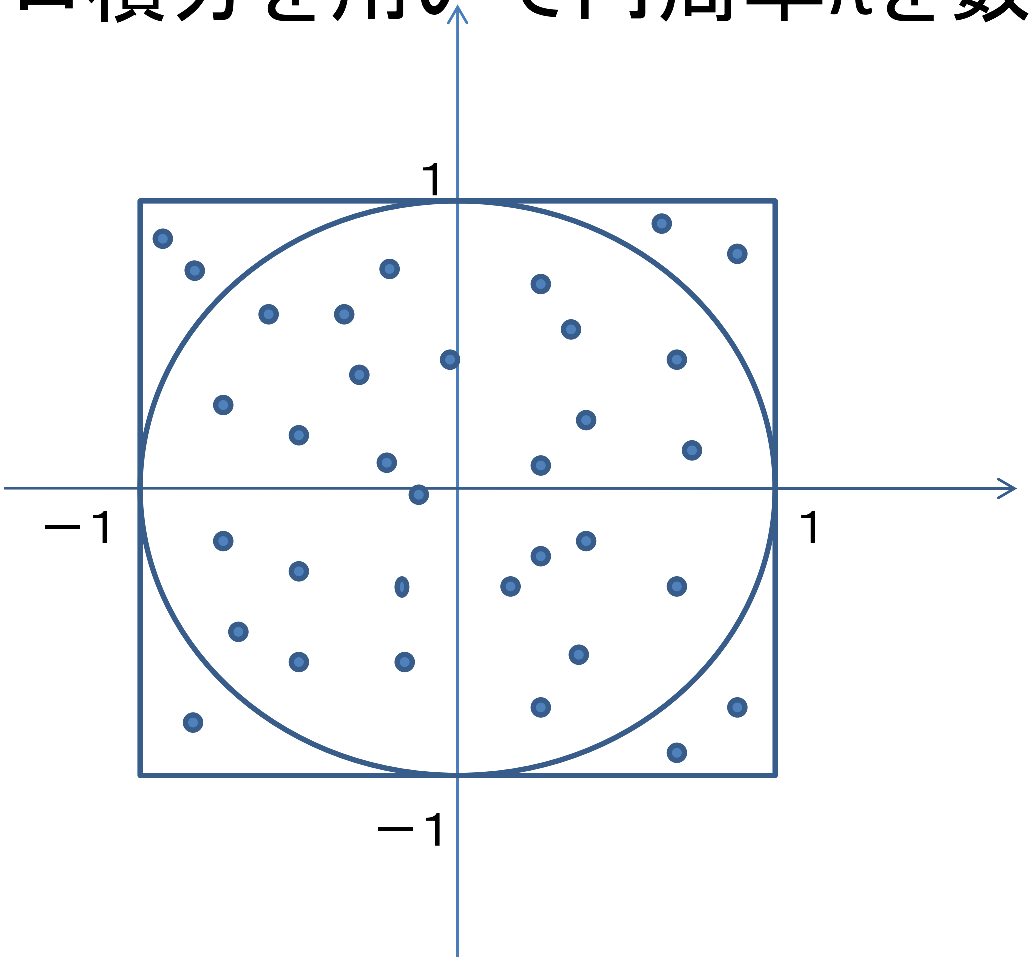
大数の法則により、モンテカルロ積分は
一致性をもつ。

$n \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} g(\theta_i) \xrightarrow{p} \int g(\theta)p(\theta)d\theta$$

モンテカルロ積分（円周率）

モンテカルロ積分を用いて円周率πを数値計算。



モンテカルロ積分（円周率）

$$g(x,y) := \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$p(x,y) := \begin{cases} 1/4 & -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

単位円の面積πは $\pi = 4\iint g(x,y)\,p(x,y)\,dxdy$

モンテカルロ積分（円周率）

$$\pi \approx \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i) = \frac{4n`}{n}$$

n`: n個の標本のうち円の中に入る標本数

大数の法則により、$n \longrightarrow \infty$ の極限で、

$$\frac{4n`}{n} \xrightarrow{\quad p \quad} \pi$$

重点サンプリング法

標本を発生させやすい確率密度関数p`(θ)を用いて任意の確率密度関数p(θ)に関する期待値を近似する方法。

$$\int g(\theta)p(\theta)d\theta = \int \left(g(\theta)\frac{p(\theta)}{p`(\theta)}\right)p`(\theta)d\theta$$

P`(θ):代理分布　　$\dfrac{p(\theta)}{p`(\theta)}$:重要度

重点サンプリング法

P`(θ)に従う標本 $\{\theta_i`\}_{i=1}^{n}$ に関する平均で前式の右辺の期待値を近似する。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\theta_i`)\frac{p(\theta_i`)}{p`(\theta_i`)}$$

大数の法則により、$n \longrightarrow \infty$ の極限で、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\theta_i`)\frac{p(\theta_i`)}{p`(\theta_i`)} \xrightarrow{p} \int g(\theta)p(\theta)d\theta$$