第5章 最尤推定法の理論的性質

5.1 準備
5.2 一致性
5.3 漸近普遍性

06T4029T 斉藤優

最尤度推定法

- 最尤推定法の性質
  - 一致性
  - 漸近不偏性
  - 漸近有効性
  - 漸近正規性

⇒ 最尤推定法が統計的に好ましい推定法

準備

- マルコフの不等式

$$P(|a| \geq \tau) \leq \frac{E_{|a|}}{\tau}$$

- チェビシェフの不等式

$$P(|b-u_b| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_b^2}{\tau} \quad (\varepsilon > \sigma_b \text{のときのみ})$$

- パラメトリックモデルの中に真の確率密度関数が含まれていると仮定

$$q(x;\theta^*) = p(x)$$

一致性(1)

- 一致推定量

$$\lim_{n\to\infty} P(\|\hat{\theta}_n - \theta^*\| \geq \varepsilon) = 0$$

※ ノルム：$\|\theta\| = \sqrt{\theta^T \theta} = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{t} (\theta^{(\ell)})^2}$

⇒ $\hat{\theta}_n$ は θ^* に確率収束する

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta^*$$

適当な条件のもとで、最尤推定量は一致性を持つ

期待値が u で分散が σ^2 の1次元正規分布の期待値 u の最尤推定量 $\hat{u}_{ML}$ で説明

$$\hat{u}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

一致性(2)

- $\hat{u}_{ML}$の期待値 $E[\hat{u}_{ML}]$ → $E[\hat{u}_{ML}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_i]=\frac{nu}{n}=u$ ※ $E[cx_i]=cE[x_i]$
- $\hat{u}_{ML}$の分散 $V[\hat{u}_{ML}]$ → $V[\hat{u}_{ML}]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V[x_i]=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$ ※ $V[cx_i]=c^2V[x_i]$

チェビシェフの不等式 ⇒ $P(|\hat{u}_{ML}-u|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

上式右辺を$n\to\infty$の 極限 ⇒ $\lim_{n\to\infty}P(|\hat{u}_{ML}-u|\geq\varepsilon)=0$

$\hat{u}_{ML}$はuに確率収束 ⇒ $\hat{u}_{ML}\xrightarrow{p}u$

一致性(3)

- 大数の法則
  - 標本平均が真の期待値に確率収束(図1)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \xrightarrow{p} \int f(x)\,p(x)\,dx$$

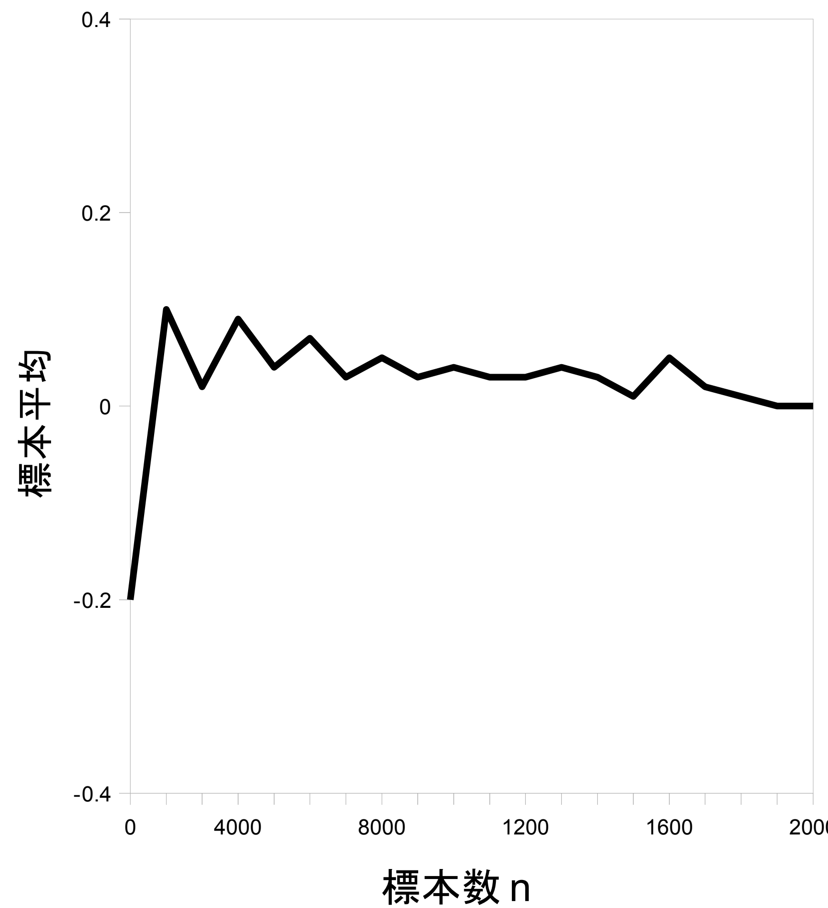

図 1. 大数の法則の例．標本は標準正規分布から生成

一致性(4)

- 推定量$\hat{\theta}$の一致性と二乗誤差$\|\hat{\theta}-\theta^*\|$の関係

$$P(\|\hat{\theta}-\theta^*\|\geq\varepsilon) = P(\|\hat{\theta}-\theta^*\|^2\geq\varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\underbrace{E[\|\hat{\theta}-\theta^*\|^2]}_{\text{期待二乗誤差}}$$

⇩

期待二乗誤差がゼロに収束する推定量は一致性を持つ

漸近不偏性(1)

- 期待二乗誤差の分解

$$E[\|\hat{\theta}-\theta^*\|^2]=\underbrace{E[\|\hat{\theta}-E[\hat{\theta}]\|^2]}_{\text{バリアンス項}}+\underbrace{\|E[\hat{\theta}]-\theta^*\|^2}_{\text{バイアス項}}$$

- 不偏性
  - 推定量のバイアスがゼロ

$$E[\hat{\theta}]=\theta^*$$

- 不偏推定量
  - 不偏性を持つ推定量

漸近不偏性(2)

- 漸近不偏性
  - $n \to \infty$ の極限でバイアスがゼロに確率収束

$$E[\hat{\theta}_n] \xrightarrow{p} \theta^*$$

- 漸近不偏推定量
  - 漸近不偏性を持つ推定量

適当な条件のもとで、最尤推定量は漸近不偏性を持つ