第3章
固有値問題を用いたカーネル多変量解析
（4）

発表者

斉藤　章久

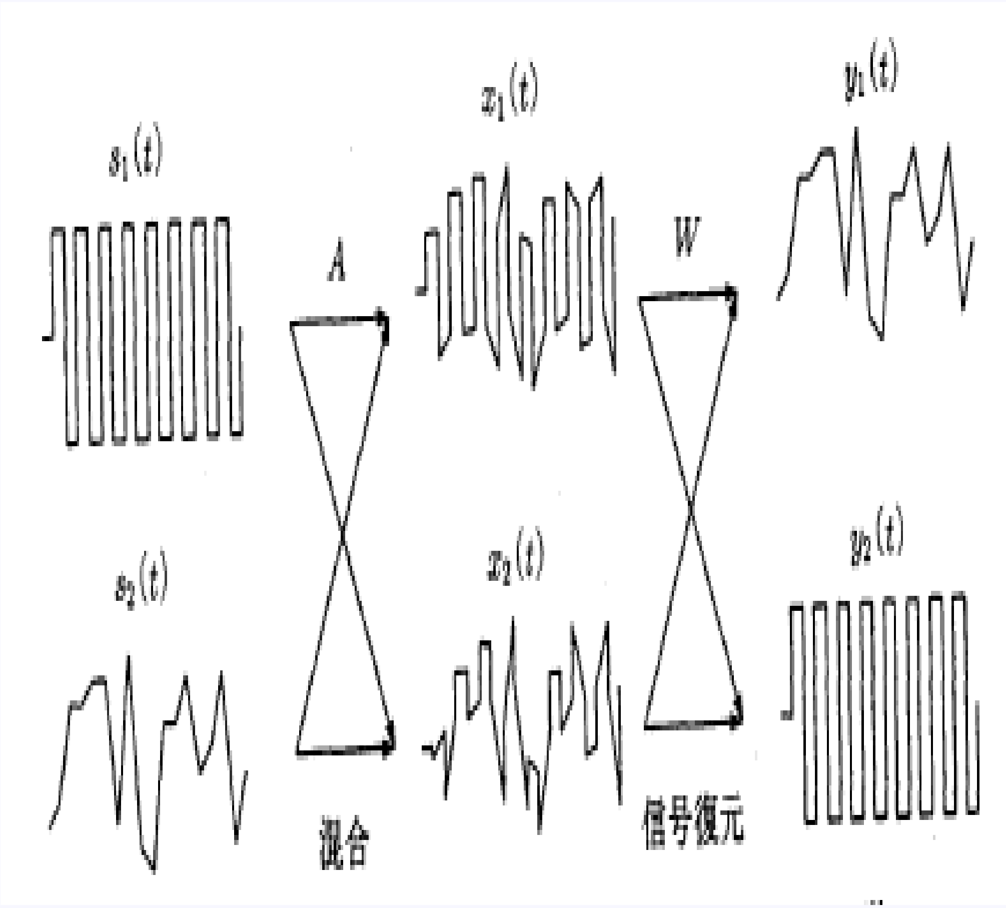
カーネル独立成分分析

- カクテルパーティ効果の数学的なモデルとして知られている。

＊カクテルパーティ効果とは、たくさんの人が話をしている環境で、話し相手だけの声を聞く分ける能力

- 正準相関分析の枠組みが適用できる。

独立成分分析の概略（1）



◆d個の信号発生源から $s_1(t), s_2(t), \cdots, s_d(t)$ という信号が出ているとする。

◆これをd個のマイクで観測。

◆i番目のマイクには$s_j(t)$の線形重ね合わせ

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{d} A_{ij} s_j(t)$$

が入力されるとする。

独立成分分析の概略(2)

- 問題としてA_{ij}が未知の状態で$x(t)$から元の信号$s(t)$を復元することである。
- そこで、$s_i(t)$は互いに独立であると仮定する。
- $s(t)$を推測するために

$$y(t) = Wx(t)$$

 という線形変換を考えよう。
- 仮にAを知っているとして、$W=A^{-1}$ならば$y(t)=s(t)$となり、$s(t)$が復元できる。
- 実際にはAは未知であり、独立な信号はそれぞれスカラー倍したりしても独立性は保たれるので、これらの自由度は残ってしまうことに注意

主成分分析による無相関化（1）

- Wはどのように決めれば良いか？

↓

無相関な信号を取り出す（線形の主成分分析でできる）

- $x^{(1)},\ldots,x^{(n)}$の平均を0と仮定し

$$X=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})^T \qquad (3.89)$$

- という行列を考える。任意のXは

$$X=U\Lambda V^T, \quad U^TU=V^TV=VV^T=I_d \qquad (3.90)$$

と分解できる。

- これをXの特異値分解という。

主成分分析による無相関化（２）

- 主成分分析はXを$W^T=V/\sqrt{n}$で変換したものととらえられ

$$\frac{1}{\sqrt{n}}XV=\frac{1}{\sqrt{n}}U\Lambda$$

が主成分分析によって得られた空間での座標値

- しかし無相関なだけでは独立とはいえない

・主成分分析で得られたデータを主成分ごとに分散１になるようにスケーリングしたものをy(t)とする。

- 任意の直交行列Rを取ってy(t)に掛けたRy(t)も無相関となる。

独立性の規準（１）

- 独立なら無相関だが、無相関だから独立というわけではない。
- そこで、信号自身の相関だけではなく、信号の関数同士の相関も考える

$$\rho_{f,g} = \mathrm{Cor}[\, f(y_i(t)) \,,\, g(y_j(t)) \,] \qquad (3.92)$$

- もし$y_i(t)$と$y_j(t)$が独立なら、$\rho_{f,g}$は0になる。

↓　逆に言うと

$\rho_{f,g}$をありとあらゆる関数に取ったとき、最大値ができるだけ小さければ、それだけ独立性が高い

独立性の規準（２）

- すべての関数について調べるのは無理なので、fもgもカーネル関数の線形和の形の関数

$$f(x) = \sum_j \alpha_j k(x_j, x)$$

に限定して考える。

- $\rho_{f,g}$を最大にするようなf,gを求める問題

↓

$y_i(t)$と$y_j(t)$でカーネル正準関数分析をして最も相関の大きい成分を出すことに対応している。

- Wを固定したときに評価規準の値ができるだけ小さくなるようにWを動かしていくことにより独立成分分析を解く。

問題

①Wを最適化するのは計算上的に難しい。

カーネル独立成分分析は、一般に目的関数が凸ではないから。

②「ありとあらゆる関数」というのを、「カーネルの線形和」に限定したことによって、独立性の保証が崩れないか。