パターン認識と機械学習

2.3.7 スチューデントのt分布

05T4074A
久保田　敦

目次

- t分布
- 自由度
- 頑健性
- 多変量型のt分布

t分布

$$p(x \mid \mu, a, b) = \int_0^\infty N(x \mid \mu, \tau^{-1}) Gam(\tau \mid a, b) d\tau$$

$$= \int_0^\infty \frac{b^a e^{(-b\tau)} \tau^{a-1}}{\Gamma(a)} \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\tau}{2}(x-\mu)^2 \right\} d\tau$$

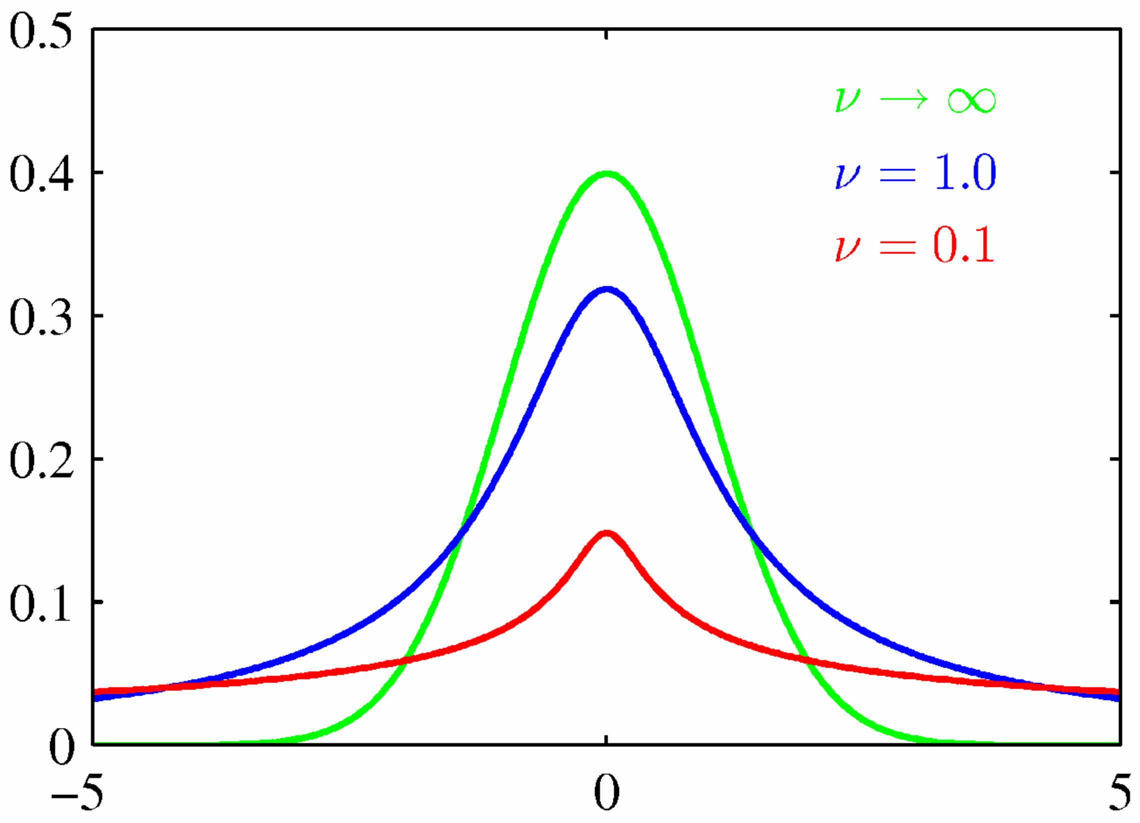
$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[b + \frac{(x-\mu)^2}{2} \right]^{-a-\frac{1}{2}} \Gamma\left(a + \frac{1}{2} \right)$$

$v = 2a, \lambda = a/b$ と定義

$$\boxed{St(x \mid \mu, \lambda, v) = \frac{\Gamma(\frac{v}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(\frac{\lambda}{\pi v} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\lambda (x-\mu)^2}{v} \right]^{-\frac{v}{2}-\frac{1}{2}}}$$

λ : 精度　　　v : 自由度

自由度ν



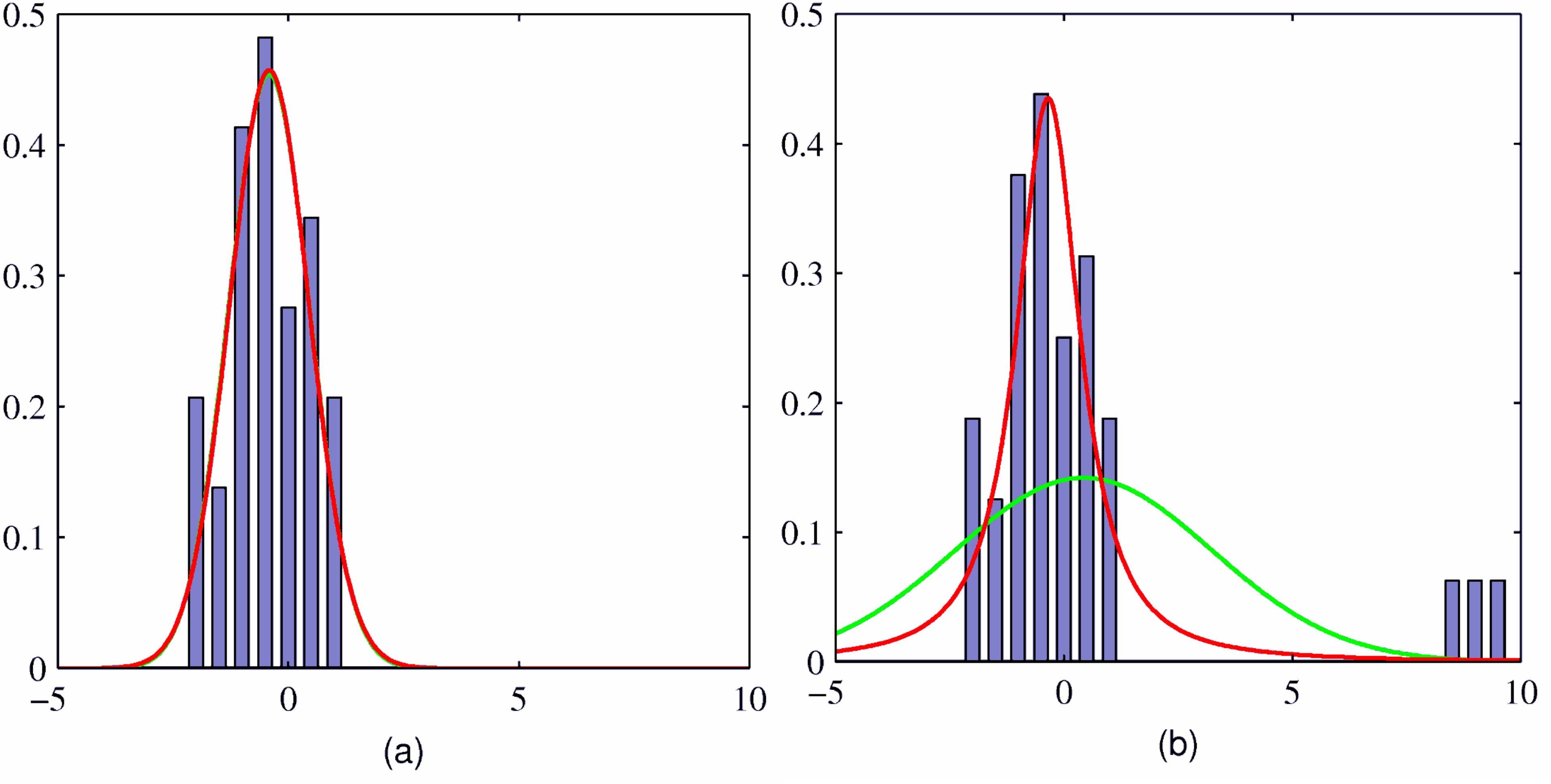
∞ → ガウス分布

1 → コーシー分布

- 平均が同じガウス分布の無限混合分布
- 一般に<u>ガウス分布よりも「すそ」が長い</u>

頑健性

- ガウス分布よりも頑健な分布
- <u>外れ値に影響されにくい</u>



多変量t分布

$\nu = 2a, \lambda = a/b, \eta = \tau b/a$ と(2.158)を置き換える

$$St(x \mid \mu, \lambda, \nu) = \int_0^\infty N(x \mid \mu, (\eta\lambda)^{-1}) Gam(\eta \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}) d\eta$$

多変量ガウス分布の場合に一般化できる

$$St(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \nu) = \int_0^\infty N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}, (\eta\boldsymbol{\Lambda})^{-1}) Gam(\eta \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}) d\eta$$

以下、同様に積分を計算

$$\boxed{St(\mathbf{x}\mid\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda},\nu)=\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\frac{\left|\boldsymbol{\Lambda}\right|^{1/2}}{\pi\nu^{D/2}}\left[1+\frac{\Delta^2}{\nu}\right]^{-\frac{D}{2}-\frac{\nu}{2}}}$$

D : xの次元数

$\Delta^2=(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$ ：マハラノビス距離の２乗

次の性質を満たす

$$\mathrm{E}[\mathbf{x}]=\boldsymbol{\mu}\qquad(\nu>1)$$

$$\mathrm{cov}[\mathbf{x}]=\frac{\nu}{(\nu-2)}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\qquad(\nu>2)$$

$$\mathrm{mode}[\mathbf{x}]=\boldsymbol{\mu}$$