パターン認識と機械学習

2.3.2 周辺ガウス分布

6月**20**日（金）

豊川　幸秀

目的

①同時分布 $p(x_a, x_b)$ がガウス分布

↓

周辺分布 $p(x_a) = \int p(x_a, x_b) dx_b$ もガウス分布

②平均と共分散の式について求める

定義

$\Lambda \equiv \Sigma^{-1}$としした同時ガウス分布$\mathrm{N}(x|\mu,\Sigma)$に対し、

$$x = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{pmatrix}$$

方針

- 同時分布の指数部分の二次形式に注目
- p(x_a)を求めるにはx_bを積分消去する必要あり

↓

<u>x_bに依存している項から処理</u>

x_b関連の項

- 式(2.70)からx_bに関連した項を取り出し、平方完成すると

$$-\frac{1}{2}(x_b-\Lambda_{bb}^{-1}m)^T\Lambda_{bb}(x_b-\Lambda_{bb}^{-1}m)+\frac{1}{2}m^T\Lambda_{bb}^{-1}m$$

・・・(2.84)

ただし、 $m=\Lambda_{bb}\mu_b-\Lambda_{ba}(x_a-\mu_a)$

平方完成後、x_bに依存しているのは右辺第１項のみなので、この項をx_bで積分する。

$$\int \exp\{-\frac{1}{2}(x_b-\Lambda_{bb}^{-1}m)^T\Lambda_{bb}(x_b-\Lambda_{bb}^{-1}m)\}dx_b$$

(2.43)から、係数は共分散行列の行列式にのみ依存しているので、この積分は影響しない。

xbの積分消去完了

x_a関連の項

- 式(2.84)の右辺第2項と、(2.70)のx_aに依存する項をまとめ、変形する

$$-\frac{1}{2}x_a^T(\Lambda_{aa}-\Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})x_a$$
$$+x_a^T(\Lambda_{aa}-\Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})\mu_a+const$$

・・・(2.87)

ただし、constはx_aに依存しない定数。

↓

x_aに依存している項が二次形式となっているため、周辺分布もガウス分布となっていることがわかる。

$p(x_a)$の平均･共分散

- 式(2.87)を式(2.71)と比較することにより平均･共分散が求まる。

〇共分散

$$\Sigma_a^{-1} = \Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba}$$

すなわち、$\Sigma_a = (\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})^{-1}$

○平均

$$\Sigma_a^{-1}\mu_a = (\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})\mu_a$$

すなわち、$\mu_a = \Sigma_a(\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})\mu_a$

分割された共分散行列による変換

- 先程求めた平均・共分散は、分割された精度行列で表現されているので、条件付き分布の時と同じように、分割された共分散行列での表現に変換してみる

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}$$

(2.76)より、$(\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba})^{-1} = \Sigma_{aa}$

よって、

平均: μ_a

共分散: Σ_{aa}

条件付き分布とは対照的に、周辺分布の平均・共分散は、分割された共分散行列について簡潔に示される