パターン認識と機械学習（上）
１．６．１相対エントロピーと相互情報量

5月16日
田中洸一

内容の流れ

- １．問題提起
- ２．相対エントロピー
- ３．問題提起2
- ４．相互情報量

問題提起

真の分布　$p(\mathrm{x})$

↑

｜２つの分布がどれだけ

｜近いか知りたい

↓

モデル化した分布　$q(\mathrm{x})$

⇒　相対エントロピーで示せる

相対エントロピー

- 分布p(x)とq(x)の差の尺度

$$\mathrm{KL}(p \| q) = -\int p(\mathrm{x}) \ln \left\{ \frac{q(\mathrm{x})}{p(\mathrm{x})} \right\} \mathrm{dx}$$

・対称な量でない、つまり $\mathrm{KL}(p\|q) \neq \mathrm{KL}(q\|p)$

・ $\mathrm{KL}(p \| q) \geq 0$

・等式が成り立つのはp(x)=q(x)の時のみ

相対エントロピー

- 離散変数の分布についても、

$$\mathrm{KL}(p \| q) = -\sum_i p(i) \ln \left\{ \frac{q(i)}{p(i)} \right\}$$

- 具体例

$p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$　$(0 < p < 1)$

$q_1 = q$, $q_2 = 1 - q$　$(0 < q < 1)$

- この場合の相対エントロピーを求める

相対エントロピー

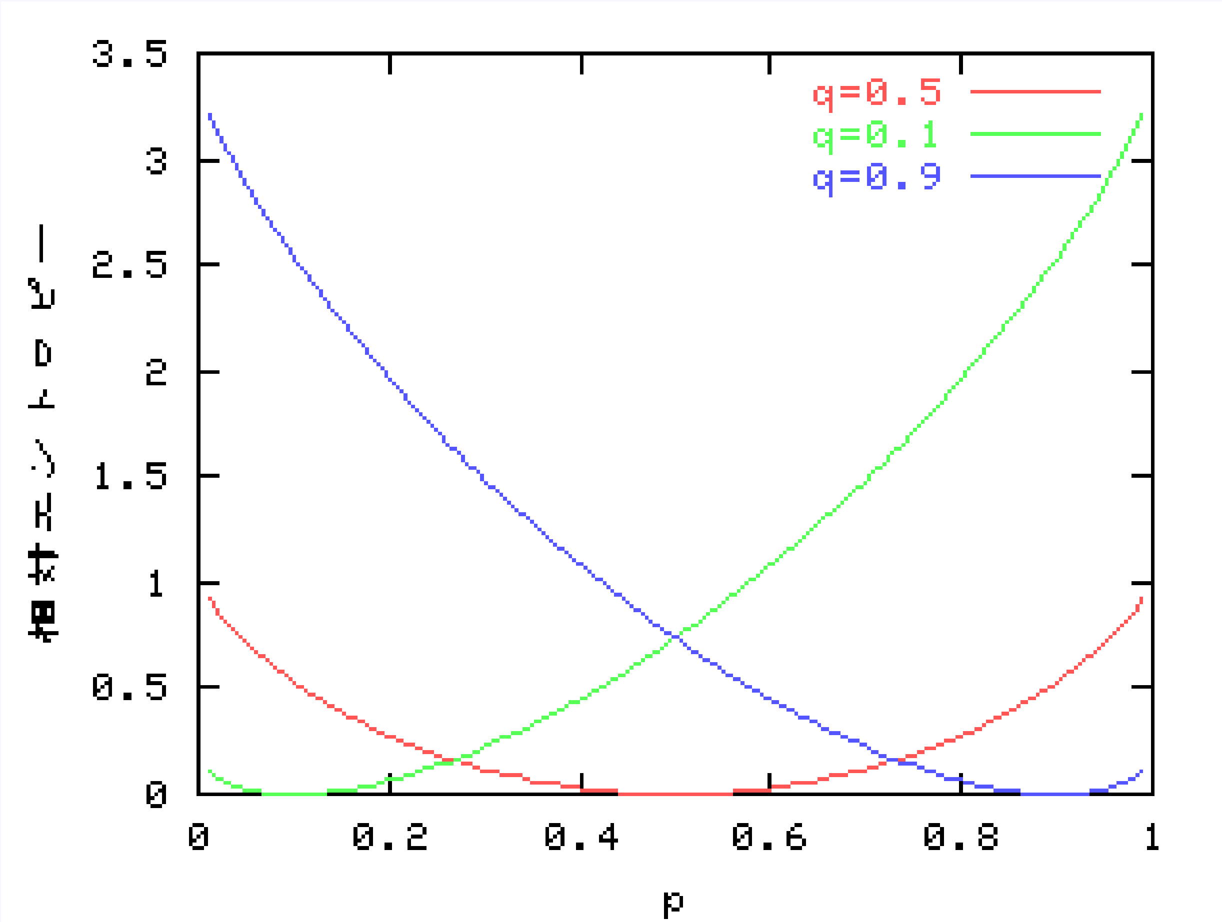
- 相対エントロピーは、

$$
\begin{aligned}
&-p\log_2\frac{q}{p}-(1-p)\log_2\frac{1-q}{1-p} \\
&=p\log_2\frac{p}{q}+(1-p)\log_2\frac{1-p}{1-q}
\end{aligned}
$$

- q=0.1,0.5,0.9とした時の相対エントロピーをグラフに示す。

相対エントロピー

- p=qでゼロ
- p=qで正



相対エントロピー

- 対称性を確かめるためにp_iとq_iを交換し、q=0.1でpを変えた時のグラフとp=0.1でqを変えた時のグラフを比較する

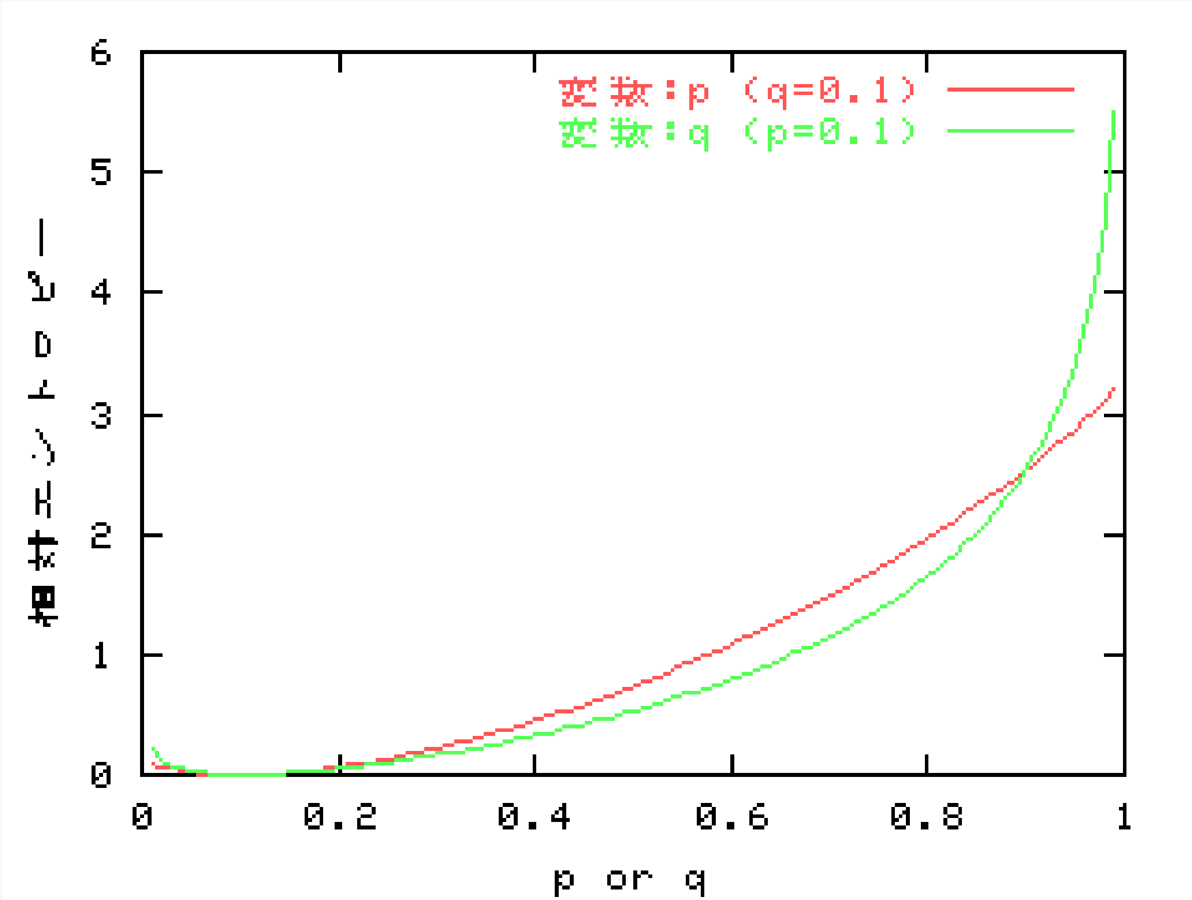
相対エントロピー

グラフは

一致しない

↓

対称でない



問題提起2

変数集合xとyの同時分布p(x, y)とすると、独立ならば、p(x, y)＝p(x)p(y)

↓

独立でない

↓

独立でないにしても、どの程度独立に「近い」か知りたい

↓

KLダイバージェンスで求めることができる

相互情報量

- 同時分布p（x，y）と周辺分布の積p（x）p（y）のKLダイバージェンス

$$\mathrm{I}[\mathrm{x},\mathrm{y}] \equiv \mathrm{KL}(p(\mathrm{x},\mathrm{y}) \| p(\mathrm{x})p(\mathrm{y})) = -\iint p(\mathrm{x},\mathrm{y}) \ln\left(\frac{p(\mathrm{x})p(\mathrm{y})}{p(\mathrm{x},\mathrm{y})}\right) \mathrm{dxdy}$$

・ $\mathrm{KL}(p \| q) \geq 0$

・符号はxとyが独立である時のみ

相互情報量

- 条件付エントロピーと関係しており、確率の加法・乗法定理により以下の式が成り立つ

$$I[x, y] = H[x] - H[x \mid y] = H[y] - H[y \mid x]$$

- 相互情報量は、yの値を知ることによって、xに関する不確実性（あいまいさ）がどれだけ減少するか表す（逆もいえる）

相互情報量