決定理論

5月9日

鈴木直也

目的

確率論によって不確実性を定量化したり、操作するための数学的枠組みが与えられる。
ここに決定理論を組み合わせることで、
パターン認識で遭遇する不確かさを含む状況において最適な意思決定を行うことができる。

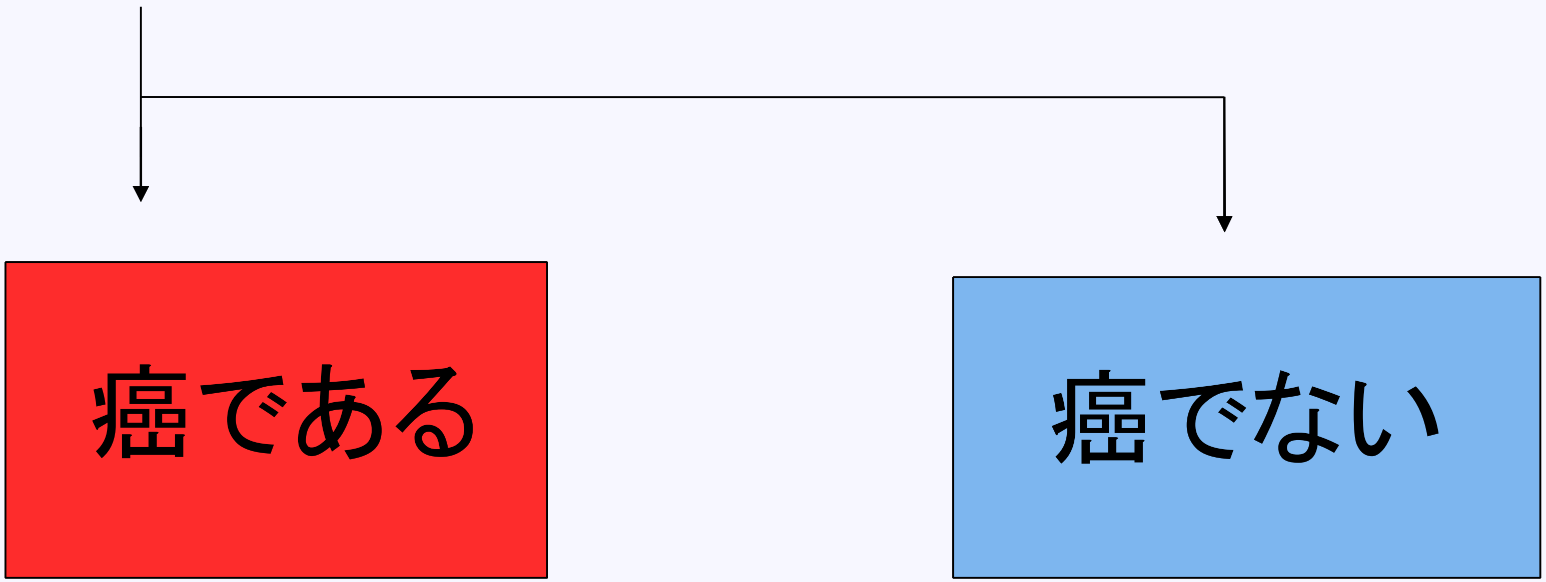
役割

- 入力ベクトルxと対応する目的変数tがあり、 xの新たな値x’に対するt’を予想することが目標であるとする。
- 回帰問題の場合tは連続変数であり、クラス分類の場合はクラスラベルを表わす。
- 同時確率分布$p(x,t)$はこれらの変数に関する不確実性を完全に要約するものである。

→決定理論を用いることによって扱うことができる。

医療問題の例

患者のX線画像を撮って、その患者が
癌であるかを判断したい。
入力ベクトルは画像のピクセル強度であり、
出力変数tはC1：癌である、C2：癌でない
この2つのクラスの内のどちらかであるとする。



医療問題の例(2)

- このとき一般的な推論問題では $p(x, C_k)$ を決めることであり、それが完全な確率的記述となる。
- 最終的に患者に治療を施すかどうかを決めるので、適当な基準の下で決定しなければならない。
- いったん推論の問題が解けてしまえば、一般的に決定は単純である。

- 患者のX線画像が得られたとき、画像に2つのクラスのどちらかを割り当てることが目標である。
  つまり、確率 $p(C_k \mid x)$ を求めたい。
  ベイズの定理を用いると

$$p(C_k \mid x) = \frac{p(x \mid C_k)\, p(C_k)}{p(x)}$$

  であらわされる。

ここでp(C1)はX線計測をする前に患者が癌である確率

p(C1|x)はX線写真の情報を用いてベイズの定理で修正した確率

結論

- xを誤ったクラスに分類する確率を最小にしたいなら、直感的には高い事後確率を持つクラスを選べばよい。

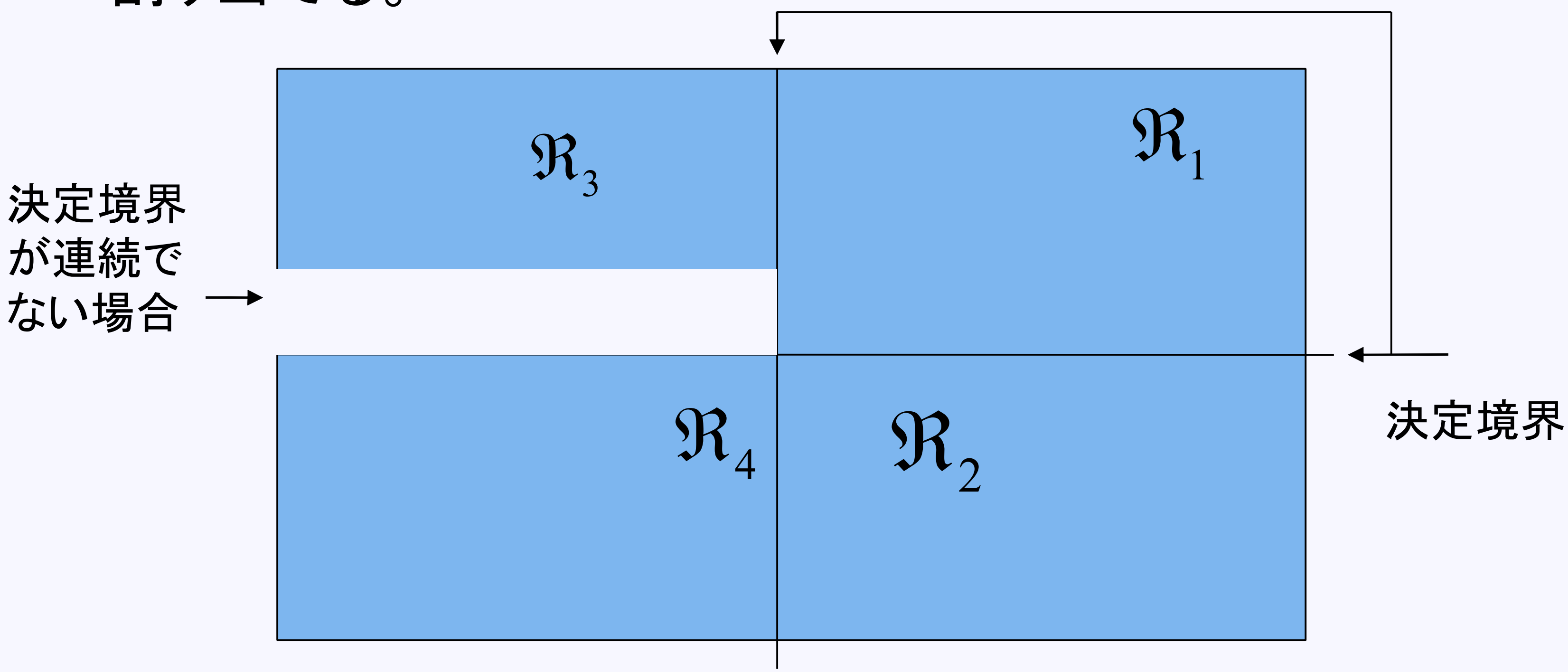
誤識別率の最小化

目的

- 先ほどの直感が正しいことを示し、さらに決定を下すための一般的な基準についても議論する。

決定境界

- 決定のためにxの各値にクラスを1つ割り振るための規則が必要である。
- この規則は入力空間を各クラスに1つずつ対応する決定領域と呼ばれる領域 $\mathfrak{R}_k$ に分割し $\mathfrak{R}_k$ 上の点にはすべてクラス C_k を割り当てる。



クラスの割り当て

- 先ほどの癌の問題のような2クラスで考える。割り当ての誤りが起こる確率は

$$p(\text{誤り}) = p(x \in \Re_1, C_2) + p(x \in \Re_2, C_1)$$
$$= \int_{\Re_1} p(x, C_2)dx + \int_{\Re_2} p(x, C_1)dx$$

となる。

$p(\text{誤り})$を最小にするには明らかに積分値が小さくなるようにクラスを割り振るべきである。つまり $p(x, C_1) > p(x, C_2)$ ならxにはクラス C_1 を割り当てるべきである。

誤識別率の最小化

- 確率の乗法定理より

$$p(C_1 \mid x)\,p(x) > p(C_2 \mid x)\,p(x)$$

p(x)は共通であるので誤り確率を最小にするには事後確率 $p(C_k \mid x)$ を最大のクラスに割り当てたときである。