パターン認識と機械学習
2.2.1 ディリクレ分布

茂木 哲矢

2008 年 6 月 6 日

ディリクレ分布

- **ディリクレ分布**
  多項分布をベイズ主義的に扱う．
  $\longrightarrow$ **事前分布を導入する．**

- **事前分布**
  - **事前分布は共役分布を考える．**
  - **多項分布**

$$Mult(m_1, m_2, \cdots, m_K|\boldsymbol{\mu}, N) = \frac{N!}{m_1!m_2!\cdots m_K!}\prod_{k=1}^{K}\mu_k^{m_k}$$

より，

$$p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}) \propto \prod_{k=1}^{K}\mu_k^{\alpha_k - 1}$$

共役分布の正規化

ディリクレ分布

$$Dir(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_K)} \prod_{k=1}^{K} \mu_k^{\alpha_k - 1}$$

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k$$

事後分布

- **事後分布**[1]

$$p(\boldsymbol{\mu}|D, \boldsymbol{\alpha}) \propto \prod_{k=1}^{K} \mu_k^{\alpha_k + m_k - 1}$$

- **正規化**

$$Dir(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{m}) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + N)}{\Gamma(\alpha_1 + m_1)\cdots\Gamma(\alpha_K + m_K)} \prod_{k=1}^{K} \mu_k^{\alpha_k + m_k - 1}$$

$\longrightarrow$ **事後分布もディリクレ分布**

$\longrightarrow$ **多項分布の共役分布になっている**

[1] **ベイズの定理より，事後分布** $\propto$ **尤度関数** $\times$ **事前分布**

2 値状態をとる量のモデル化

- **二項分布**

$$Bin(m|N,\mu) = \frac{N!}{(N-m)!m!}\mu^m(1-\mu)^{N-m}$$

- K=2 **の多項分布**

$$Mult(m_1, m_2|\boldsymbol{\mu}, N) = \frac{N!}{m_1!m_2!}\prod_{k=1}^{2}\mu_k^{m_k}$$

$\sum_{k=1}^{2} m_k = N, m_1$ **をとる確率を** μ **とすると**

$$Mult(m_1, m_2|\boldsymbol{\mu}, N) = \frac{N!}{m_1!(N-m_1)!}\mu^{m_1}(1-\mu)^{N-m_1}$$