パターン認識と機械学習

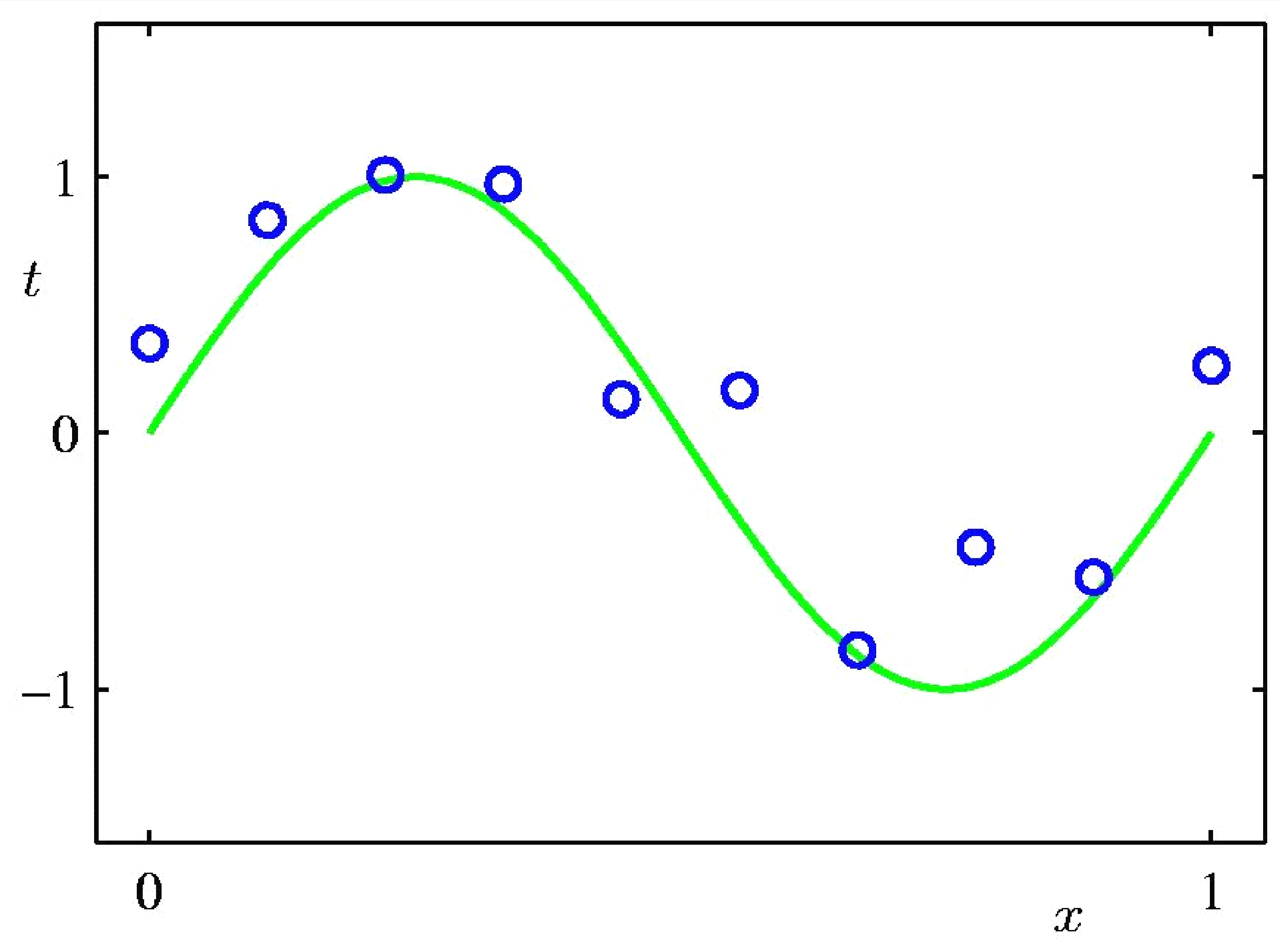
1.2.5 曲線フィッティング再訪

05T4078Y
茂木　哲矢

話の流れ

1. 曲線フィッティングの復習
2. 最尤推定
3. MAP推定

曲線フィッティングの復習



曲線フィッティング復習2

xとwの多項式関数で表す

$$y(x,\mathbf{w}) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_M x^M = \sum_{i=0}^{M} w_i x^i$$

tにはノイズがのっていて

$$t = y(x,\mathbf{w}) + e$$

– e:ノイズ分

最尤推定の準備

tが $N(t \mid y(x, \mathbf{w}), \beta^{-1})$ に従う

$$\rightarrow \ p(t \mid x, \mathbf{w}, \beta) = N(t \mid y(x, \mathbf{w}), \beta^{-1})$$

未知パラメータ**w**, β を最尤推定で求める

最尤推定

尤度関数

$$p(\mathbf{t} \mid \mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta) = \prod_{n=1}^{N} N(t_n \mid y(x_n, \mathbf{w}), \beta^{-1})$$

対数尤度関数

$$\ln p(\mathbf{t} \mid \mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta) = -\frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{N} \{y(x_n, \mathbf{w}) - t_n\}^2 + \frac{N}{2} \ln \beta - \frac{N}{2} \ln(2\pi)$$

最尤パラメータ

- $\mathbf{w}_{ML}$

  二乗和誤差の最小化と等価

- β_{ML}

$$\frac{1}{\beta_{ML}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{y(x_n, \mathbf{w}_{ML}) - t_n\}^2$$

予測分布

最尤パラメータが決まる

$$\rightarrow p(t \mid x, \mathbf{w}_{ML}, \beta_{ML}) = N(t \mid y(x, \mathbf{w}_{ML}), \beta_{ML}{}^{-1})$$

MAP推定

特徴

事後分布を最大にするようなパラメータを求める

wの事前分布，事後分布を導入

$$\rightarrow \underbrace{p(\mathbf{w} \mid \mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta)}_{\text{事後分布}} \propto \underbrace{p(\mathbf{t} \mid \mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta)}_{\text{尤度}} \underbrace{p(\mathbf{w}, \alpha)}_{\text{事前分布}}$$

事後分布の最大化

事前分布

$$p(\mathbf{w}|\alpha) = N(\mathbf{w}|0,\alpha^{-1}\mathbf{I}) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{(M+1)/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w}\right)$$

事後分布

$$\ln p(\mathbf{w}|\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha,\beta) \propto -\left[\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}\{y(x_n,\mathbf{w})-t_n\}^2 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w}\right]$$

$+\mathbf{w}$を含まない項

→正則化された二乗和誤差の最小化と等価

おわり