問題

　この演習問題では、１変数ガウス分布に関する規格化条件 (1.48) を証明する。
　このために、積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2)dx \tag{1.124}$$

を考え、その２乗を

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}y^2)dxdy \tag{1.125}$$

の形で書いて評価する。
　(1) 直交座標系 (x, y) から極座標系 (r, θ) に変換し、$u = r^2$ を代入する。θ と u に関する積分を実行し、両辺の平方根を取ることにより

$$I = (2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.126}$$

が得られることを示せ。
　(2) 最後にこの結果からガウス分布 $\mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)$ が規格化されていることを示せ。

解 (1)

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}y^2)dxdy$$

ここで、直交座標系を極座標系に変換する。

$$x = r\cos\theta \qquad r : 0 \rightarrow \infty$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta : 0 \rightarrow 2\pi$$

となる。
　ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

なので、

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(r\cos\theta)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(r\sin\theta)^2 \big\} rdrd\theta$$

となる。まとめていくと

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}(r\cos\theta)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(r\sin\theta)^2\Big\} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\big\{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\big\}\Big] r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\Big\} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\Big) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\Big) r dr
\end{aligned}
$$

ここで、$r^2 = u$ とすると

$$2rdr = du$$

$$rdr = \frac{1}{2}du$$

r	0	$\to$	∞
u	0	$\to$	∞

となるので

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\Big) r dr \\
&= \big[\theta\big]_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{u}{2\sigma^2}\Big)\frac{1}{2}du \\
&= \frac{2\pi}{2}\int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{u}{2\sigma^2}\Big) du \\
&= \pi\Big[(-2\sigma^2)\exp(-\frac{u}{2\sigma^2})\Big]_0^{\infty} \\
&= -2\pi\sigma^2\Big[\exp(-\frac{\infty}{2\sigma^2}) - \exp(-\frac{0}{2\sigma^2})\Big] \\
&= -2\pi\sigma^2(0-1) \\
&= 2\pi\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad I = (2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$$

解 (2)

正規分布の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) dx = 1 \tag{1.48}$$

ここで、

$$\mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \Big\} \tag{1.46}$$

なので、代入して計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \Big\} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \Big\} dx$$

ここで $y = x - \mu$ とすると

$$dy = dx$$

x	$-\infty$	$\to$	∞
y	$-\infty$	$\to$	∞

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2} y^2 \Big\} dy$$

積分の項に注目すると、(1) で求めた形なので

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} I \\ &= \frac{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$(1.48) が示された