

「パターン認識と機械学習」 演習問題 1.40 解答

新納浩幸

問題 1.40

イエンセンの不等式(1.115)を $f(x)=\ln(x)$ に適用し、実数集合の算術平均が、幾何平均よりも決して小さくならないことを示せ。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$$

解答

イエンセンの不等式において、

$\lambda_i = 1/n$, $f(x) = \log x$ とおく。

$\log x$ が上に凸なので、不等式が逆転すること
に注意すると

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log a_i \\ &= \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \log\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}\end{aligned}$$

$\log x$ は単調増加関数なので、

$$\log x \leq \log y \Leftrightarrow x \leq y$$

以上より、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$$