演習問題1.28　解答

久保田　敦

７月１１日

問題

1.6 節で、エントロピー $h(x)$ のアイディアを、確率分布 $p(x)$ を持つ確率変数の値を観測することによって増える情報量として導入した。また、変数 x,y が $p(x,y)=p(x)p(y)$ となって独立なときは、エントロピーは加法的で、$h(x,y)=h(x)+h(y)$ となることを見た。この演習問題では、h と p の間の関数関係 h(p) を導く。

１：まず、$h(p^2)=2h(p)$ となることを示し、数学的帰納法により、正の整数 n に対し $h(p^n)=nh(p)$ となることを示せ。

２：さらに、正の整数 m に対し $h(p^{n/m})=(n/m)h(p)$ が成り立つことを示せ。

このことから x が正の有理数のとき $h(p^x)=xh(p)$ が成り立つが、これは連側性により正の実数値の場合も成り立つ。

３：最後にこのことから $h(p)$ が $h(p)\propto\ln p$ の形を取らなければならないことを示せ。

解答

$$p(x,y)=p(x)p(y) \tag{1}$$
$$h(x,y)=h(x)+h(y) \tag{2}$$

１：$h(p^n)=nh(p)$ を示す。

・$n=2$ のとき

(2) 式を $h(p)$ の関係にすると

$$h(p(x,y))=h(p(x))+h(p(y)) \tag{3}$$

となる。これらを用いて変形すると

$$\begin{aligned}h(p(x)^2) &= h(p(x)\cdot p(x))\\ &= h(p(x,x))\\ &= h(p(x))+h(p(x))\\ &= 2h(p(x))\end{aligned}$$

となり、$h(p^2)=2h(p)$ となることがわかる。

・$n=k$ で $h(p^k)=kh(p)$ が成り立ったと仮定すると $n=k+1$ では

$$\begin{aligned}h(p^{k+1}) &= h(p\cdot p^k)\\ &= h(p)+h(p^k)\\ &= h(p)+kh(p)\\ &= (k+1)h(p)\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ でも成り立つ。

よって正の整数 n に対し $h(p^n)=nh(p)$ が成り立つことが示された。

２：$h(p^{n/m})=(n/m)h(p)$ を示す。

　１より、

$$\begin{aligned} h(p^{\frac{n}{m}}) &= h((p^{\frac{1}{m}})^n) \\ &= h(p^{\frac{1}{m}})+h(p^{\frac{1}{m}})+\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$h(p)$ について考える。

$$h(p^{\frac{m}{m}})=mh(p^{\frac{1}{m}})$$

$$h(p^{\frac{1}{m}})=\frac{1}{m}h(p^{\frac{m}{m}}) \tag{5}$$

(5) を (4) 代入すると

$$\begin{aligned} h(p^{\frac{n}{m}}) &= \frac{1}{m}h(p)+\frac{1}{m}h(p)+\cdots \\ &= \frac{n}{m}h(p) \end{aligned}$$

よって $h(p^{n/m})=(n/m)h(p)$ が成り立つことが示された。

３：$h(p)\propto \ln p$

　情報量であること及び $h(p^x)=xh(p)$ の式を満たすことから、$h(p)$ は

・p が指数 x をもつとき、$h(p)$ を x 倍にしたものと同じである。

・p が小さい値であるほど、$h(p)$ の値は大きくなる。

等の性質も満たさなくてはならない。これらの性質を満たすには $h(p)$ は $\ln p$ に比例した形でなくてはならない。