問題1.17

松本良太

7月11日

問題

ガンマ関数は、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \tag{1}$$

で定義される。

(1) 部分積分を使って $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を証明せよ。

(2)$\Gamma(1) = 1$ を示し、x が整数なら $\Gamma(x+1) = x!$ となることを示せ。

(1) 解

式 (1) より、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty u^x e^{-u} du$$

$(-e^{-u})\prime = e^{-u}$ とおけるから、部分積分より、

$$\Gamma(x+1) = \left[-u^x e^{-u}\right]_0^\infty + x\underline{\int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du}$$

$u \to \infty \Rightarrow e^{-u} \to 0$
$u \to 0 \Rightarrow u^x \to 0$ だから、第 1 項は 0 になる。

第 2 項下線部は式 (1) に等しい。よって、

$$\underline{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \tag{2}$$

(2) 解

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} du = \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = 1 \tag{3}$$

式 (2)、(3) から、数学的帰納法を用いることで、

x が整数ならば、

$$\underline{\Gamma(x+1) = x!}$$

が証明できる。