

1.15

$M = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^D \sum_{i_2=1}^D w_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} &= w_{11} x_1 x_1 + (w_{12} + w_{21}) x_1 x_2 + \cdots + (w_{1D} + w_{D1}) x_1 x_D \\ &\quad + w_{22} x_2 x_2 + \cdots + (w_{2D} + w_{D2}) x_2 x_D \\ &\quad \vdots \\ &\quad + w_{DD} x_D x_D \end{aligned} \quad (1)$$

となり、係数の冗長性を取り除くと以下の式に変形できる。

$$\sum_{i_1=1}^D \sum_{i_2=1}^{i_1} \tilde{w}_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} \quad (2)$$

一般の M の場合にも同様にして係数をまとめることができるので、

$$\sum_{i_1=1}^D \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} \tilde{w}_{i_1 i_2 \cdots i_M} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_M} \quad (3)$$

を得ることができる。

次に、 D 次元多項式の M 次の項における独立パラメータの数 $n(D, M)$ は

$$n(D, M) = \sum_{i_1=1}^D \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} 1 \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} 1 = n(i_1, M-1) \quad (5)$$

と等しいので、

$$n(D, M) = \sum_{i_1=1}^D n(i_1, M-1) \quad (6)$$

が成り立つ。

式 (1.136) の証明を数学的帰納法を利用して証明する。 $D = 1$ のとき、左辺、右辺ともに 1 となり、式は成り立つ。一般の D 次元で成り立つと仮定して、 $(D+1)$ 次元のときは、

$$\sum_{i=1}^{D+1} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!} = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!M!} + \frac{(D+M-1)!}{D!(M-1)!} = \frac{(D+M)!}{D!M!} \quad (7)$$

となり、 $(D+1)$ 次元のときも成り立つ。

式 (1.137) の証明も数学的帰納法を利用して証明する。 $M = 2$ のとき、左辺、右辺ともに D となり、式 (1.137) は成り立つ。 $(M-1)$ 次のときに成り立つと仮定して、 M 次のときは、

$$n(D, M) = \sum_{i_1=1}^D n(i_1, M-1) = \sum_{i_1=1}^D \frac{(i_1+M-2)!}{(i_1-1)!(M-1)!} = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!M!} \quad (8)$$

よって、 M 次のときも成り立つ。

1.16

演習 1.15 より、 m 次の独立パラメータの数は $n(D, m)$ である。したがって、0 次から M 次までのパラメータの総数 $N(D, M)$ は以下のように書くことができる。

$$N(D, M) = \sum_{m=0}^M n(D, m) \quad (9)$$

式 (1.139) の証明を数学的帰納法を利用して証明する。 $M = 0$ のとき、左辺、右辺ともに 1 となり、式 (1.139) は成り立つ。 M 次のときに成り立つと仮定して、 $M + 1$ 次のときは、

$$N(D, M + 1) = N(D, M) + n(D, M + 1) \quad (10)$$

$$= \frac{(D + M)!}{D!M!} + \frac{(D + M)!}{(D - 1)!(M + 1)!} \quad (11)$$

$$= \frac{(D + M + 1)(D + M)!}{D!(M + 1)!} = \frac{(D + M + 1)!}{D!(M + 1)!} \quad (12)$$

となる。これより、一般の M 次について成り立つ。

n が大きいとき、スターリングの近似式 $n! \simeq n^n e^{-n}$ が存在する。 $D \gg M$ のとき、スターリングの近似式より

$$D! \simeq D^D e^{-D}, (D + M + 1)! \simeq D^{(D+M+1)} e^{-D} \quad (13)$$

となるので、

$$\frac{(D + M + 1)!}{D!M!} \simeq \frac{D^M}{M!} \quad (14)$$

となり、 D^M で大きくなる。また、 $M \gg D$ のとき、

$$M! \simeq M^M e^{-M}, (D + M + 1)! \simeq M^{(D+M+1)} e^{-M} \quad (15)$$

となるので、

$$\frac{(D + M + 1)!}{D!M!} \simeq \frac{M^D}{D!} \quad (16)$$

となり、 M^D で大きくなる。

$M = 3$ 、 $D = 10$ のとき、近似式では $10^3/3! \simeq 167$ 、真値は $N(10, 3) = 286$ となる。また、 $M = 3$ 、 $D = 100$ のとき、近似式では $100^3/3! \simeq 166667$ 、真値は $N(10, 3) = 176851$ となる。