1.2.4　ガウス分布

茨城大学工学部情報工学科
05T4072R
相原　功昌

ガウス分布（Gaussian distribution）

- 連続変数の確率分布の一種
- 別名、正規分布(Normal distribution)
- 式（1.46）で表される

$$N(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi \sigma^2)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\} \quad \cdots (1.46)$$

ガウス分布

μ :平均（期待値）　σ^2:分散　σ :標準偏差

β :精度パラメータ（分散の逆数）

$$N(x \mid \mu, \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\ \sigma^2)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\} \quad \cdots (1.46)$$

ガウス分布のプロット

- 標準偏差によるグラフの変化を図1.13.1に示す

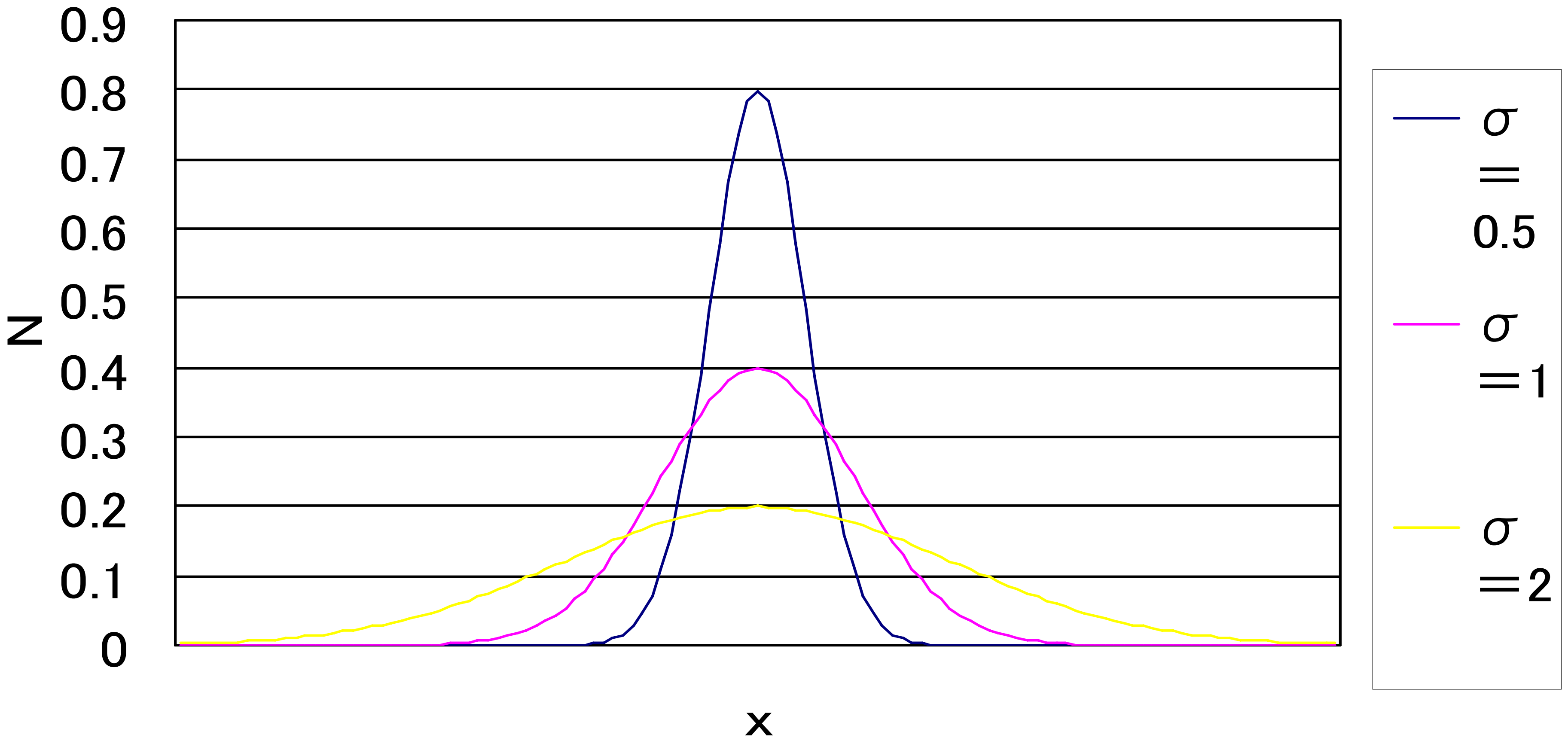

図1.13.1 正規分布

ガウス分布のプロット(2)

- 平均によるグラフの変化を図1.13.2に示す

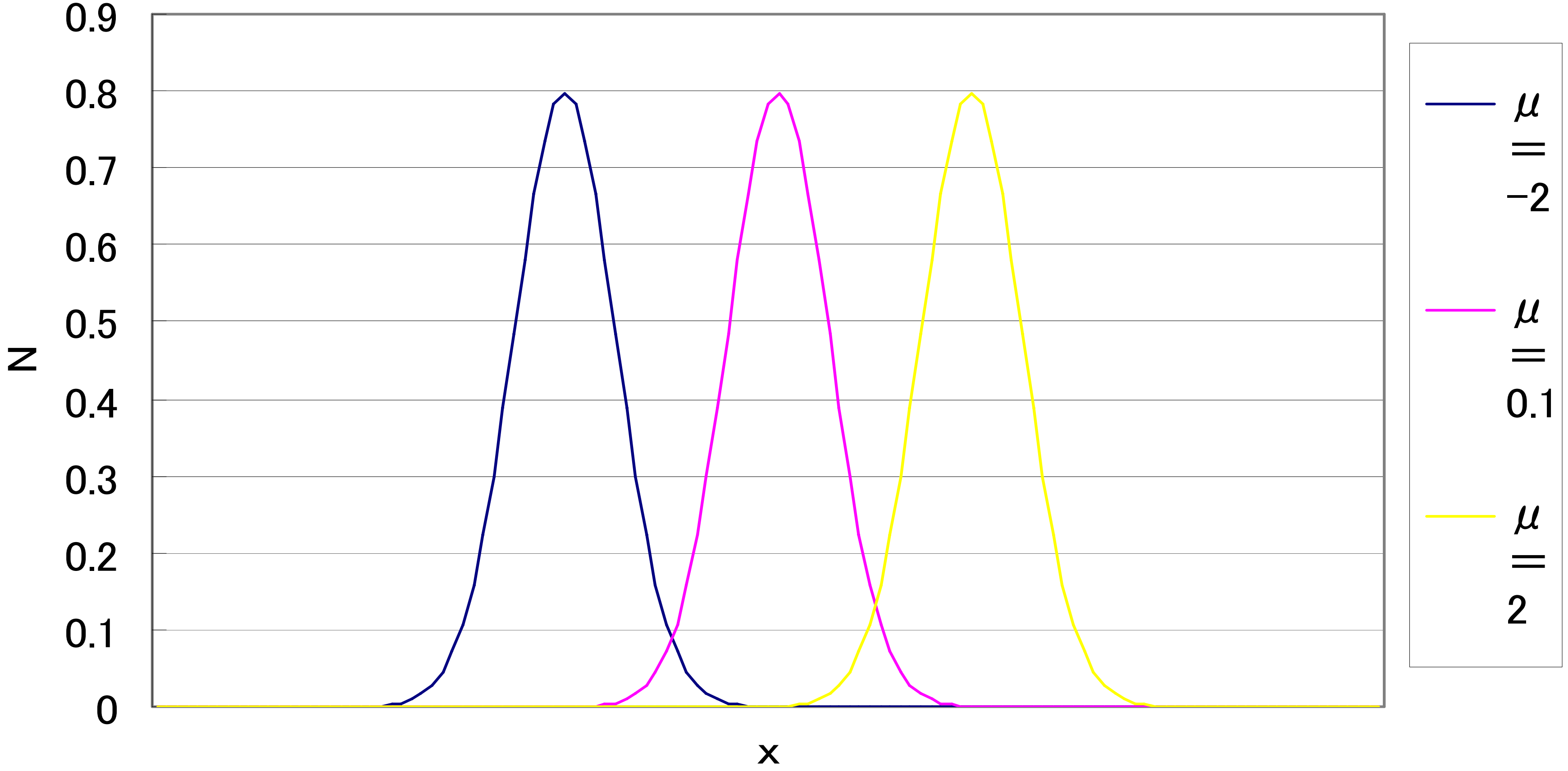

図1.13.2 正規分布

平均（mean）: μ

- 連続確率変数Xの平均→式（1.46.1）

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \quad \cdots(1.46.1)$$

- ガウス分布の下でのｘの平均→式（1.46.2）

$$E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} N(x|\mu,\sigma^2)xdx \quad \cdots(1.46.2)$$

$$=\mu$$

分散(variance)：σ^2

- 分散→式（1.51）

$$\mathrm{var}[x] = E[x^2] - E[x]^2 \qquad \cdots（1.51）$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} N(x \mid \mu, \sigma^2) x^2 dx$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

$$= \sigma^2$$

独立同分布 :i.i.d.

- 同じ分布から独立に生成されたデータ点

- 同じ分布→
  ここでは正規分布
- 独立に生成→
  サイコロを振って目が出る確率など
  前の結果に依存しない

例

- N個の観測値からなるデータ集合**X**

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

- **X**はi.i.d.
- 独立な事象の同時確率は、それぞれの事象の周辺確率の積
- 平均と分散が与えられた時の、データ集合の確率→式（1.53）

$$p(X \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{n=1}^{N} \mathrm{N}(x_n \mid \mu, \sigma^2) \quad \cdots (1.53)$$

尤度関数

- 式1.53を、μとσ^2の関数とみなす
  →ガウス分布に対する尤度関数

- 尤度
  →結果からみた前提の尤もらしさを数値化したもの

例

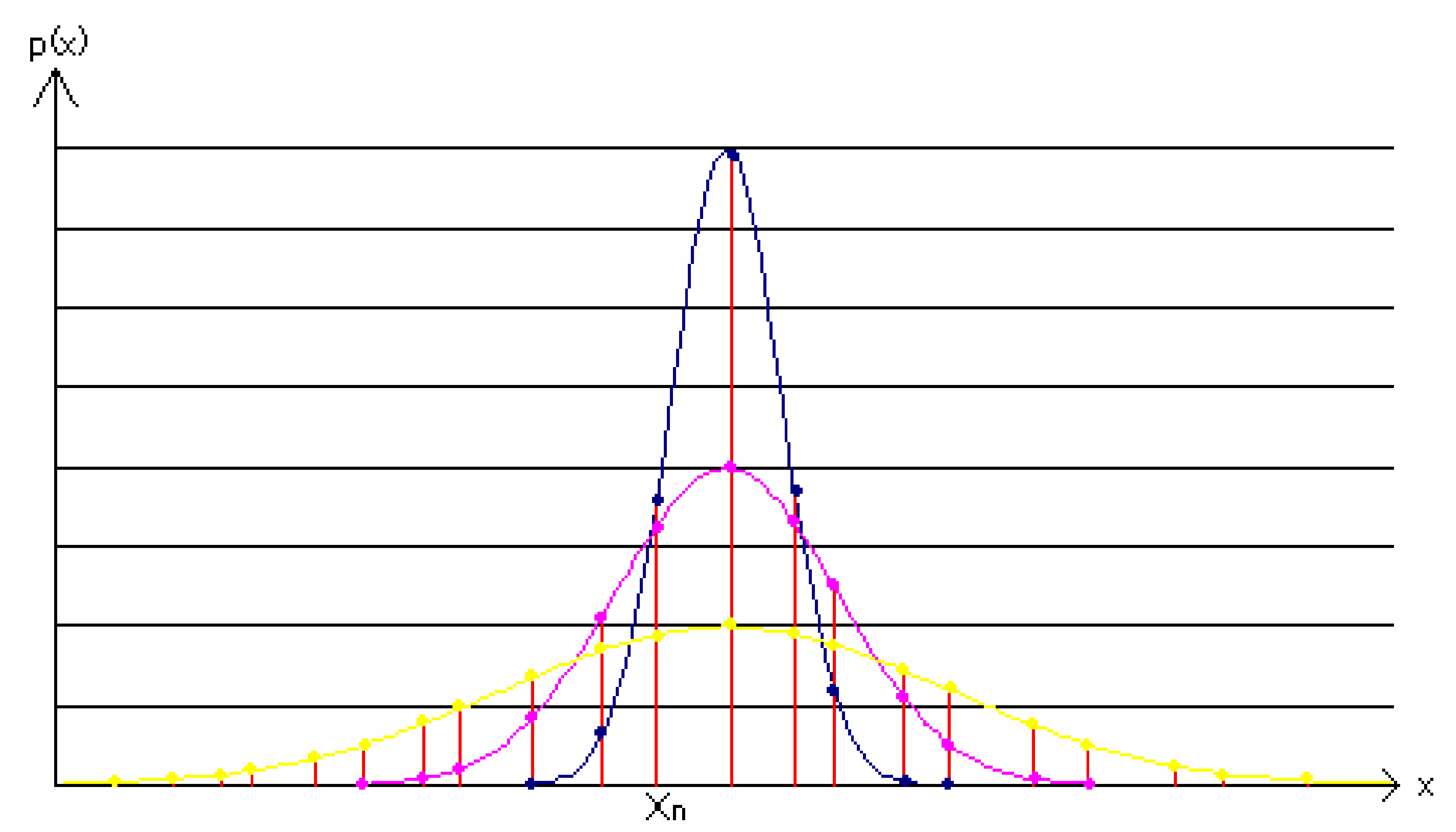

図1.14 尤度関数

尤度関数の最大化

- μとσ^2を決定するために、尤度関数を最大化
  →尤度関数の対数を最大化
  ＝関数そのものの最大化
- 式1.46と式1.53から対数尤度関数の式1.54を得る

$$\ln p(X \mid \mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2 - \frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{N}{2}(2\pi) \quad \cdots (1.54)$$

サンプル平均

- 式1.54をμに関して最大化

→式1.55

$$\mu_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \qquad \cdots (1.55)$$

- 式1.55をサンプル平均と呼ぶ
- 観測値$\{x_n\}$の平均

サンプル分散

- 式1.54をσ^2について最大化

→式1.56

$$\sigma^2{}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_{ML})^2 \qquad \cdots (1.56)$$

- 式1.56をサンプル分散と呼ぶ

バイアス

- 分布の分散が系統的に過小評価される現象
- 多項式曲線フィッティングにおける過学習の問題と関連
- データ点の数Nが小さいと、深刻な問題となる