入門ベイズ統計

第10章　信頼性とベイズ統計学

11月21日（金）
豊川　幸秀

目次

- 10.3 経験的ベイズ決定
  - 経験的ベイズ決定(推定)とは？
  - 経験的ベイズ決定による事前確率分布の導出
  - 例

経験的ベイズ決定とは

- 事前確率分布が未知であり、何らかのデータによって推定しようとする考え方を、経験的ベイズ決定(推定)と呼ぶ。
- 事前確率分布が適当でないと困る問題に適している。

事前確率分布の導出(1)

実際には、最終観測値で事後確率分布に変換されたものが決定に用いられる。また(2.1.2)より、事後確率分布 $w'(\theta \mid x)$ の期待値を求めるものとする。

離散型確率分布 $f(x|\theta)$ について、

$$\frac{f(x+1 \mid \theta)}{f(x|\theta)} = a(x) + b(x)\theta$$

と仮定する。（ $a(x), b(x) \neq 0$ の関数）

事前確率分布の導出(2)

変形して、

$$\theta = \frac{f(x+1|\theta)}{b(x)f(x|\theta)} - \frac{a(x)}{b(x)}$$

事後確率分布は

$$w'(\theta | x) = \frac{w(\theta)\cdot f(x|\theta)}{\int_\theta w(\theta)\cdot f(x|\theta)d\theta}$$

であり、分母は x についての周辺分布となるので、

$$f(x) = \int_\theta w(\theta)\cdot f(x|\theta)d\theta$$

とおける。

事前確率分布の導出(3)

よって期待値は、

$$E'(\theta \mid z) = \int_\theta \theta \cdot w'(\theta \mid x) d\theta$$

$$= \frac{f(x+1)}{b(x) \cdot f(x)} - \frac{a(x)}{b(x)}$$

$f_n(x)$ を以下を満たす、x の相対頻度とする

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\{x_1, x_2, \cdots, x_n \text{中}, x_i = x \text{となった個(回)数}\}$$

事前確率分布の導出(4)

よって、

$$\hat{\theta}_{EB} = \frac{f_n(x+1)}{b(x)\cdot f_n(x)} - \frac{a(x)}{b(x)}$$

これにより、推定が完了した。

ポワソン分布における推定

$$f(x|\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}(x=0,1,2,\cdots)$$

より、

$$\frac{f(x+1|\lambda)}{f(x|\lambda)}=\frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}}{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}}=\frac{\lambda}{x+1}$$

これと(10.3.2)を比較すると、$a(x)\equiv 0, b(x)=\dfrac{1}{x+1}$ より、

$$\hat{\lambda}_{EB}=\frac{(x+1)\cdot f_n(x+1)}{f_n(x)}$$

となる。