入門ベイズ統計

第7章　ベイズ更新とカルマン・フィルター

10月24日（金）
豊川　幸秀

流れ

- 7.1 リアル･タイム推定
- 7.2 カルマン･フィルターのモデル

リアル・タイム推定(1)

カルマン・フィルターとは？

・<u>リアル・タイム</u>で利用するのに適した形をしている推定法の一種。

・本来の説明は数学的に繁雑だが、ベイズ統計学の観点からアプローチすると分かりやすい。

フィルターとは？

・時系列データから誤差を落とし、信号だけを取り出す装置や手続き。（≒推定）

リアル・タイム推定(2)

例:宇宙衛星の位置や速度をθ_tとしたとき、線型の関数 φ による漸化式

$$\hat{\theta}_t = \varphi(\hat{\theta}_{t-1}, y_t)$$

で表せるとする。

この時$\hat{\theta}_t$は、一時点前までの推定値$\hat{\theta}_{t-1}$を現在の観測値y_tをもとにし、線形関数φで変えればいいだけ。

リアル・タイム推定(3)

一方もし $\hat{\theta}_t$ を、過去の一連の観測値 $\{y_t, y_{t-1}, \cdots, y_2, y_1\}$ から導こうとした場合、tが進むにつれ、計算量がどんどん増加してしまう。

カルマン・フィルターのモデル(1)

観測値の時系列のデータ: $y_t, y_{t-1}, \cdots, y_2, y_1$
状態: θ_t **(** y_t と θ_t は線型の関係**)** のとき、

観測方程式

$$y_t = F_t \theta_t + \nu_t$$

F_t は知られた量、ν_t は観測誤差で、平均0、分散 σ_t^2 の正規分布 $N(0, \sigma_t^2)$ に従う。

カルマン・フィルターのモデル(2)

θ_tは時間とともに変化するため、

システム方程式

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$$

で表される。w_tはこの方程式の誤差で、平均0、分散τ_t^2の正規分布 $N(0,\tau_t^2)$ に従う。

観測方程式およびシステム方程式の、ペアによるシステムの表現の仕方を、状態空間表現という。

例1

例1:飛行物体の軌道追跡

人工衛星に対し、

$$\theta_t = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))'$$

という6次元の状態があるとする。

y_t :θ_tに依存した、ステーションから見た各観測値

F_t:立体幾何学、天体力学などの公式

G_t:運動方程式

例2－(1)

例2:統計的品質管理

逐次的に抽出されたサンプル中の不良率について。

観測される不良率 y_t は、真の不良率 θ_1 について、

$$y_t = \theta_{1t} + \nu_t$$

となる。(観測方程式)

θ_t については、真の不良率 θ_1 とは別に、θ_2 (不良率のドリフト)を用いる。

$$\theta_{2t} = \theta_{2,t-1} + w_{2t}$$

例2－(2)

θ_2 は θ_1 に影響を与えるため、

$$\theta_{1t} = \theta_{2t} + w_{1t}$$

以上から、

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \theta_{1t} \\ \theta_{2t} \end{pmatrix}$$

$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix}$ とおくと、システム方程式は

$$\theta_t = G\theta_{t-1} + u_t$$

で表せる。(システム方程式)