入門ベイズ統計
§11.3　ジーマン-ジーマンによる画像処理モデル

１２月５日

田中洸一

内容

- １．概略
- ２．ギブスサンプリングの利用の意義
- ３．マルコフ確率場とギブス分布
- ４．ベイズの定理の適用

１．概略

- 「画像」は「濃度」を持つ多くの点の集合

$x(i,j)$:真のピクセル 値の濃度 $e(i,j)$: 誤 差 $Y(i,j)$: 観測値

$$Y(i,j)=x(i,j)+e(i,j)$$

- 目的は $Y(i,j)$ から $x(i,j)$ を推定する

  ↓ 方法の1つ

- 「ギブスサンプリング」による「ジーマンジーマン」の手法

- 次は、なぜギブスサンプリングなのかを説明する。

２. ギブスサンプリングの利用の意義

- １. <u>ギブス分布</u>を使う
- ２. 確率分布の扱い方が、<u>ベイズ統計学の考え方</u>（式展開）で用いられている
- ３. 事後分布の一部の計算が大変であるが、「MCMC法」により、実現可能となった。
- ４. ３. によって実際にソフトウェアも開発され、ベイズ統計学に用いられている

- 次からギブスサンプリングが利用できることを説明する。

３．マルコフ確率場とギブス分布

- ものの’かたち’は似た性質の集合からできている
- (i,j)と(i',j') が近ければ、$X(i,j)$と$X(i',j')$ は関係がある

- $\{X(i,j)\}$は、確率場であって、異なった (i,j)は相関あると仮定
- マルコフ性を仮定し、「マルコフ確率場」を定義

(i,j) の近傍をVとするとき

$$P(x(i,j)\mid x(i,k),(i,k)\neq(i,j))=P(x(i,j)\mid x(i,k),(i,k)\in V)$$

※ここでの近傍は近い位置に位置しているということ

３．マルコフ確率場とギブス分布

- マルコフ確率場はその点の局所的周囲のみ確率が影響を受ける

↓

- 「画像」はマルコフ確率場であると考えられる

- 次に、あるたとえ話で説明していく

３．マルコフ確率場とギブス分布

社会

＝人 (i,j)　　＝クリーク（仲間）　　＝トモダチ

ある人のトモダチである⇔その人の近傍Ｖに入っている。

３．マルコフ確率場とギブス分布

- $x(i,j)$ ＝人 (i,j) の能力
- U_c ：クリークcとしての’業績指標’
- 社会全体が成し遂げる業績指標

$$E(x)=\sum_{c\in C}U_c(x) \qquad ※ \quad x:\{x(i,j)\}\text{を略記}$$

- 高いEの値は難しく、低いEの値が起こりやすい。
- その確率は、パラメータβを用いて以下に与えられる

$$\frac{1}{z}\cdot e^{-\beta E(x)} \qquad (z=\sum e^{-\beta U(x)}) \qquad (11.3.1)$$

３．マルコフ確率場とギブス分布

- つまり、高いEは確率が<u>小さく</u>、低いEは<u>大きい</u>。

  ↓　βを変動

- $\beta \to 0$のときは高いEが<u>増え</u>低いEが<u>減る</u>。

  $\beta \to \infty$のときは<u>低いEへの集中</u>が起こる。

- つまり、βはその社会の周囲の外的環境の因子と考えられる。

- この確率にしたがって$\{x(i,j)\}$が生起するならその確率変数はマルコフ確率場になる。
- この関数形の確率分布自体が「ギブス分布」である。

- ギブス分布をうまく画像処理の$\{x(i,j)\}$に適用するのがジーマン-ジーマンの方法である。次に示す。

４．ベイズの定理の適用

- 画像劣化の式

$$Y(i,j)=x(i,j)+e(i,j) \quad \rightarrow \quad Y_s=x_s+e_s(s\in S)$$

- 誤差のノイズ e_s は加法的で作用し正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従い、$s\in S$ ごとに独立
- 劣化した $\{Y_s\}$ の尤度は、｜S｜次元正規分布

$$\pi(y|x)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{|S|/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{s\in S}(y_s-x_s)^2\right\} \quad (|S|=S\text{の個数})$$

４．ベイズの定理の適用

- x_sに、事前分布をギブス分布とする

$$\pi(x) = \frac{1}{z}\exp\{\beta\sum_{[s,t]} x_s x_t\}$$

- よって、事後確率は以下となる。

$$\pi(x|y) = \frac{1}{z_p}\exp\{\beta\sum_{[s,t]} x_s x_t - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{s\in S}(y_s - x_s)^2\}$$

※z_pは規格化定数でexp{　}の積分

- $\pi(x|y)$ を最大にする $x = \hat{x}$を選べばよい
- しかし、z_p の計算が大変

　　↓

- 「MCMC法」によって実現可能となった。