ベイズ入門
第8章　医学とベイズ決定（前編）

10月31日

田中　洸一

内容

- 問題提起（＝８．１　医学的意思決定）
- ８．２　検査による診断
- ８．３　ベイズの定理による取り扱い

８．１　医学的意思決定

　医学や医療の分野において、診断（＝医学的意思決定）は
とても重要！！

↓

　医療の分野の膨大なデータ（検査結果など）を正しく分析することによって、医療は改善されてきた。

↓

◎ベイズ定理を用いて、診断という行動を理解し、
　医学とベイズ決定の関係を表していく。

８．２　検査による診断（１）

表 8.1

(a) 疾病と検査結果の論理的組合せ

結果＼疾病	有 (D)	無 ($\bar{D}$)
陽性 (T^+)	真陽性 (True Positive)	偽陽性 (False Positive)
陰性 (T^-)	偽陰性 (False Negative)	真陰性 (True Negative)

(b) 検査データ（2×2 分割表）

結果＼疾病	有 (D)	無 ($\bar{D}$)	計
陽性 (T^+)	a	b	$a+b$
陰性 (T^-)	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

(a) は表 1.1 と同一であるが，検査というものはつねにこの形式を有する．また (b) のように 2×2 分類される．

８．２　検査による診断（２）

- 検査評価を示す四つの結果

・<u>感度</u>　$s_+ = \dfrac{a}{a+c}$ (8.2.1)　　感度がよい　→ <u>疾患のある患者を見逃さない</u>

・<u>特異度</u> $s_- = \dfrac{d}{b+d}$ (8.2.2)　　特異度がよい　→ <u>疾患のない人を患者としない</u>

・<u>適中度</u>　検査結果側から見た予測価値（<u>医師にとって重要</u>）

・陽性反応適中度 $v_+ = \dfrac{a}{a+b}$ ・陰性反応適中度 $v_- = \dfrac{d}{c+d}$ (8.2.3)

８．２　検査による診断（３）

・有病率　$$p_D = \frac{a+c}{a+b+c+d} \qquad (8.2.4)$$

適中度は扱う対象集団の患者の頻度に影響する！！

↓

感度、特異度が高くても、有病率が低ければ

陽性反応適中度は低くなってしまう！！

８．２　検査による診断（４）

表８．２　＝表８．１bのそれぞれの値をa+b+c+d（対象集団数）で割り、感度、特異度、有病率で表現。

表 8.2　検査データからの比率

結果 ＼ 疾病	D	$\bar{D}$
T^+	$s_+ p_D$	$(1-s_-)(1-p_D)$
T^-	$(1-s_+)p_D$	$s_-(1-p_D)$
	p_D	$1-p_D$

表 8.1b の全体を $a+b+c+d$ で割り，p_D, s_+, s_- の定義を用いればこの表となる．この表はベイズの定理と密接な関係を有する．

８．２　検査による診断（５）

表８．２より $$v_+ = \frac{s_+ p_D}{s_+ p_D + (1 - s_-)(1 - p_D)} \qquad (8.2.5)$$

感度、特異度を等しくsとする、

$$v_+ = \frac{s p_D}{(1-s) - (1-2s) p_D}$$

$$= \frac{\dfrac{s}{1-s}}{1/p_D - \dfrac{1-2s}{1-s}} \qquad (8.2.6)$$

有病率p_Dの関数となる。

８．２　検査による診断（6）

これは$1/p_D\ (1/p_D \geq 1)$ の関数$\nu_+\left(1/p_D\right)$となり、以下の極限をもつ。

$1/p_D = 1(p_D = 1)$のとき、$\nu_+ = 1$(高い有病率の極限)

$1/p_D \to \infty(p_D = 0)$のとき、$\nu_+ \to 0$(低い有病率の極限)

有病率高い可能性がある集団に対して、<u>適中度の高い検査法</u>でも、<u>一般的な集団に有効な検査法</u>であるとはいえない！！

８．２　検査による診断（7）

表 **8.3**　有病率に対する陽性反応適中度の値

有病率	感度，特異度 s			
	0.90	0.95	0.99	0.999
$\frac{1}{5}$	0.692	0.826	0.961	0.996
$\frac{1}{10}$	0.500	0.679	0.917	0.991
$\frac{1}{50}$	0.155	0.280	0.669	0.953
$\frac{1}{100}$	0.083	0.161	0.500	0.910
$\frac{1}{1000}$	0.009	0.019	0.090	0.500
$\frac{1}{5000}$	0.002	0.004	0.019	0.167
$\frac{1}{10000}$	9×10^{-4}	0.002	0.010	0.091

有病率が低下すると，検査の予測価値も自動的に低下する．ただし，感度，特異度によってこの関係は異なる（ここでは，2 つは等しいとする）．

８．３　ベイズの定理による取り扱い (1)

疾病と検査結果は確率的な原因と結果の関係にある

↓

感度、特異度などをベイズの定理として取り扱える

図8.2から、条件付確率 $P(T^+ | D) = s_+$ である。

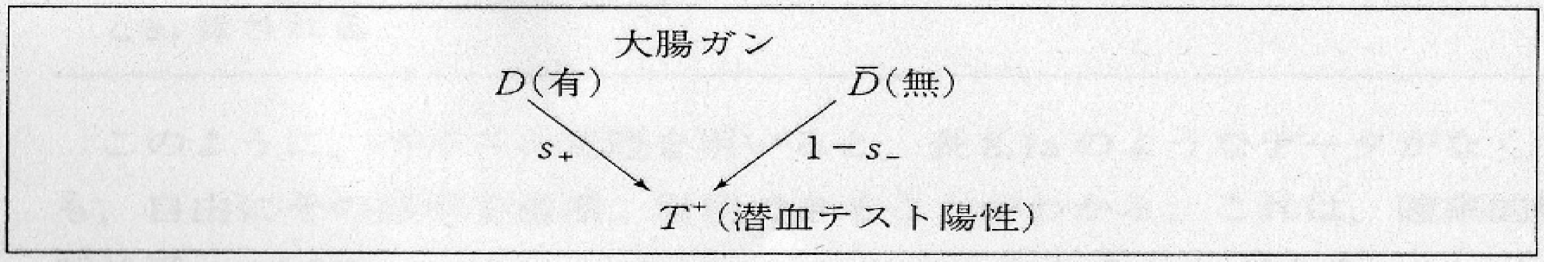

図 **8.2**　検査のベイズの定理による表現

1 つの結果をもたらす原因が 2 通りあり，その原因の確率が求められる．

８．３ ベイズの定理による取り扱い (2)

ベイズの定理を応用

・感度、特異度について

$$P\left(T^{+} \mid D\right) = s_{+},\ P\left(T^{-} \mid \bar{D}\right) = s_{-} \qquad (8.3.1)$$

・有病率について

$$P\left(D\right) = p_{D},\ P\left(\bar{D}\right) = 1 - p_{D} \qquad (8.3.2)$$

・原因の確率を事前確率として、事後確率

$$P\left(D \mid T^{+}\right) = \frac{P\left(D\right) P\left(T^{+} \mid D\right)}{P\left(D\right) P\left(T^{+} \mid D\right) + P\left(\bar{D}\right) P\left(T^{+} \mid D\right)} \qquad (8.3.3)$$

$P\left(D \mid T^{+}\right)$は陽性反応適中度なので、

$$P\left(D \mid T^{+}\right) = \nu_{+} \qquad (8.3.4)$$

８．３ ベイズの定理による取り扱い (３)

（8.3.1）,（8.3.2）,（8.3.4）を（8.3.3）に代入して、

$$\nu_+ = \frac{p_D s_+}{p_D s_+ + (1-p_D)(1-s_-)} \qquad (8.3.5)$$

(8.2.5)と一致する。

〇ベイズの定理を用いると、データを割合ではなく、

一般的な確率で表し、自由にその確率を演算できる。

→　　確率的情報処理