第 11 章 イメージ・プロセシングとベイズ推定

§11.1 イメージ・プロセシング
§11.2 点拡がり関数の考え方

05T4078Y 茂木哲矢

November 28, 2008

Outline

イメージ・プロセシング

- イメージ（画像）の情報はデータで扱う
- イメージは各点の白黒の濃度段階に量子化されている
- イメージ生成時にノイズの影響を受けてぼける
- 伝送の過程でひずむ
- 生じたぼけやひずみを回復する手法
  $\rightarrow$ イメージ・プロセシング（画像処理）

イメージ $f(x,y)$ のくずれ方 I

- 現象が生起した点と観測した点がずれる
  $\rightarrow$ 広がったイメージが観測される
- ノイズ e が加わって濃淡の度合いが変わってしまう

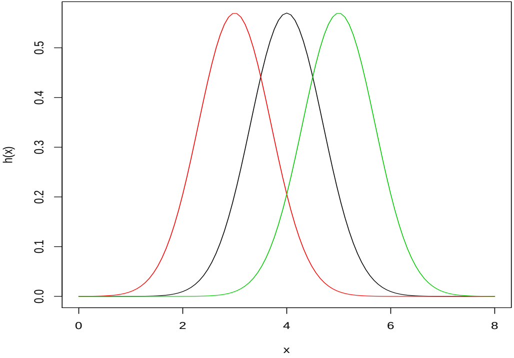
$$f(x,y) + e(x,y) \tag{11.2.1}$$

  e は通常正規分布に従い，ホワイト・ノイズ と呼ばれる
- ノイズよって (x,y) にあった '点' $f(x,y)$ が拡がって観測される
  そのような拡がりを与える関数を，点広がり関数 という

イメージ $f(x, y)$ のくずれ方 II

点拡がり関数の例

$$h(x, y) = \frac{a^2}{\pi} \exp\{-a^2(x^2 + y^2)\} \qquad (11.2.2)$$



観測値の数式表現

点 (x, y) で観測される値は，近傍の点 $(x-u, y-v)$ からのぼけが重なったのもなので，

- 2 次元では

$$\tilde{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u, v) \cdot f(x-u, y-v)dudv \tag{11.2.3}$$

- 1 次元では

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(x-u)du \tag{11.2.4}$$

  と書き，右辺の操作を h と f のたたみこみという

- 離散型（1 次元）では

$$\tilde{f}(x) = \sum_i h(u_i)f(x-u_i) \tag{11.2.6}$$

このような数式表現になる

イメージの回復の難しさ

- f から $\tilde{f}$ を求める変換

$$f \longrightarrow \tilde{f} \tag{11.2.8}$$

は荷重付の和もしくは積分で易しい

- $\tilde{f}$ から f を求める変換

$$\tilde{f} \longrightarrow f \tag{11.2.9}$$

和から元の数を求めることになり，一意に解けない
これは「逆問題」に相当し，解く事は難しい

フーリエ変換によるイメージの回復 I

- **点拡がり関数** $h(u)$
- $\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(x-u) du$

$\Longrightarrow$ **フーリエ変換を用いると，**

$$\tilde{F}(t) = H(t) \cdot F(t) \tag{11.2.11}$$

$F(t)$ **について変形すると**

$$F(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{H(t)} \tag{11.2.12}$$

となり， $h(u)$ **と** $f(x)$ **を分離することができる**
$F(t)$ **に対して逆フーリエ変換を用いると**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{F}(t)}{H(t)} \right\} e^{itx} dt \tag{11.2.14}$$

となり元のイメージ $f(x)$ **が回復される**

フーリエ変換によるイメージの回復 II

- (11.2.14) の $H(t)$ で割っているのはノイズを落とす操作であり，フィルタリング と呼ばれるものである
- 実際に処理を行うイメージは数 10 メガバイトときわめて大きいので，フーリエ変換を離散的関数の操作に置き換えた高速フーリエ変換 の方法が用いられる

ベイズ的逐次近似法

- 点拡がり関数に対してベイズの定理を用いる逐次近似法
- 濃淡をあらわす関数 $f(x,y)$, $h(x,y)$, $\tilde{f}(x,y)$ を確率密度関数と考える
- 1 次元の場合でも

$$f(x), h(x), \tilde{f}(x) \tag{11.2.15}$$

  を確率密度関数と考える
- 確率密度関数は因果論的にベイズの定理によって結ばれているものとする

元のイメージ $f(i)$ を求める I

- 位置 i に '真' のイメージが生じる確率を $f(i)$
- 位置 i で生じたイメージが位置 k で観測される確率を $h(k|i)$
- 位置 k で観測されたイメージが，実は位置 i で起こった条件付確率を $\tilde{f}(i|k)$

とすると，ベイズの定理より

$$\tilde{f}(i|k) = \frac{f(i) \cdot h(k|i)}{\sum_{i'} f(i') \cdot h(k|i')} \tag{11.2.17}$$

元のイメージ $f(i)$ は

$$f(i) = \sum_k g(i,k) = \sum_k \tilde{f}(i|k) h(k) \tag{11.2.18}$$

元のイメージ $f(i)$ を求める II

(11.2.17) を (11.2.18) に代入して，

$$f(i) = \sum_k \frac{h(k|i)f(i) \cdot h(k)}{\sum_{i'} f(i') \cdot h(k|i')} \tag{11.2.19}$$

右辺の $f(i)$ を $f^{(r)}(i)$，左辺の $f(i)$ を $f^{(r+1)}(i)$ とすると，

$$f^{(r+1)}(i) = f^{(r)}(i) \cdot \sum_k \frac{h(k|i) \cdot h(k)}{\sum_{i'} h(k|i') \cdot f^{(r)}(i')} \tag{11.2.20}$$

この $f^{(r)}(i)$ が $r \to \infty$ のとき

$$f^{(r)}(i) \to f(i) \tag{11.2.21}$$

に収束すると仮定すると，(11.2.20) で $r \to \infty$ として求めた $f^{(r)}(i)$ が求める $f(i)$ となる

関数の設定

- $h(k)$，$h(k|i)$ は実際のデータから求める

確率密度関数の例

- $h(k)$ は観測された点イメージの相対度数の分布
- $h(k|i)$ は点 i で現象を起こして点 k で観測される相対度数の分布

- 漸化式の第 1 段階は

$$f^{(1)}(i) = \sum_k \frac{h(k|i)h(k)}{\sum_{i'} h(k|i')} \tag{11.2.22}$$

ベイズ的逐次近似法の例 I

↖	↑	
←	20	60
	100	140

(a) 真の点イメージ（2 次元）

2	4
6	8

(b) 点拡がり関数（2 次元）

2	10	12
16	60	52
30	82	56

(c) 観測された点イメージ（2 次元）

図 11.5: 2 次元の場合の点イメージの拡がり

ベイズ的逐次近似法の例

図 11.5 のイメージで以下のようにパラメータを設定してイメージを回復してみた

- $h(k)$ 観測された点イメージ
- $h(k|i)$ (b) 点拡がり関数の相対度数分布

ベイズ的逐次近似法の例 II

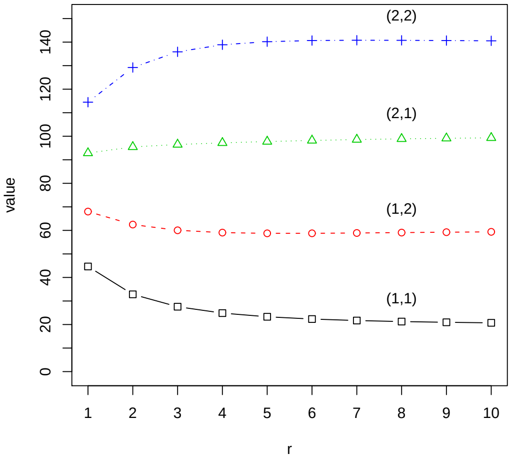


図 11.6: **真のイメージの回復**

フーリエ逆変換法と逐次近似法

- 複雑でないイメージの場合は $r = 10$ 程度で鮮明なイメージが回復される
- 複雑なイメージの場合は $r > 10$ で回復が現れはじめる
- 通常はフーリエ逆変換法を用い，フーリエ逆変換法が効果が出ないときに，ベイズ的逐次近似法が有効である
- ベイズ的逐次近似法はコストでやや劣るのが，今後の課題である