

# 第7章 ベイズ更新とカルマンフィルター

## §7.3 カルマン・フィルターの漸化式

### §7.4 シミュレーション例

05T4078Y 茂木哲矢

October 24, 2008

# Outline

- ① 7.3 カルマン・フィルターの漸化式
- ② 7.4 シミュレーション例
- ③ まとめ

## カルマン・フィルターの漸化式

### カルマン・フィルター

時点  $(t - 1)$  の推定値  $\hat{\theta}_{t-1}$  と時点  $t$  の観測値  $y_t$  から，時点  $t$  の推定値  $\hat{\theta}_t$  を求める

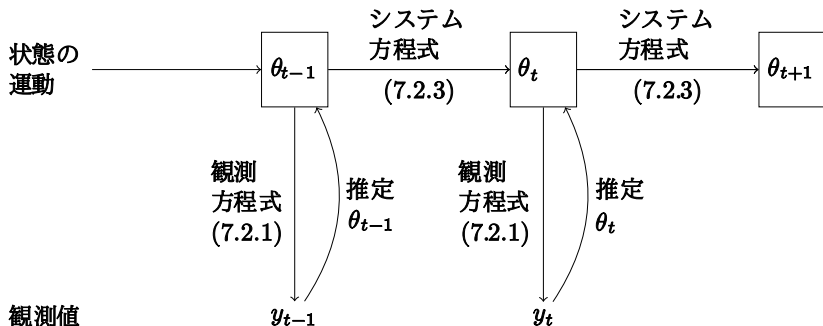


図 7.5: システムの世界（運動）とそれに対する観測

## 問題提起

時点  $(t - 1)$  の推定値  $\hat{\theta}_{t-1}$  と時点  $t$  の観測値  $y_t$  から，時点  $t$  の推定値  $\hat{\theta}_t$  を求めることを

$$(\hat{\theta}_{t-1}, y_t) \xrightarrow{\varphi} \hat{\theta}_t \quad (7.3.1)$$

として，この変換  $\varphi$  を求める

## 変換 $\varphi$ を求める (( $t-1$ ) 時点)

- 真の値  $\theta_{t-1}$  は推定値  $\hat{\theta}_{t-1}$  を中心とする正規分布

$$N(\hat{\theta}_{t-1}, \delta_{t-1}^2) \quad (7.3.2)$$

に従う

$$\theta_{t-1} = \hat{\theta}_{t-1} + \text{誤差}$$

- 真の値  $\theta_t$  はシステム方程式  $\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$  より

$$\theta_t = G_t \hat{\theta}_{t-1} + G_t \cdot \text{誤差} + w_t$$

$$N(G_t \hat{\theta}_{t-1}, G_t^2 \delta_{t-1}^2 + \tau_t^2) \quad (7.3.3)$$

に従う

- システム方程式より  $\theta_t$  は

$$\tilde{\theta}_t = G_t \hat{\theta}_{t-1} \quad (1 \text{ 時点先予測}) \quad (7.3.4)$$

で推定できる

ただし, 完全な推定には観測値  $y_t$  が必要

## 変換 $\varphi$ を求める ( $t$ 時点)

- 観測値  $y_t$

- $\tilde{y}_t \equiv F_t \hat{\theta}_t = F_t G_t \hat{\theta}_{t-1}$  (7.3.5)

⇒ 差

$$e_t \equiv y_t - \tilde{y}_t = F_t \theta_t + v_t - F_t G_t \hat{\theta}_{t-1} = F_t (\theta_t - G_t \hat{\theta}_{t-1}) + v_t \quad (7.3.6)$$

を得る  $e_t$  は

- $\theta_t \neq G_t \hat{\theta}_{t-1}$
- $w_t(v_t?)$

⇒ 差  $e_t$  だけ新しい情報があり, この  $e_t$  を イノベーション という

## 変換 $\varphi$ を求める (ベイズの定理の適用)

- データ  $e_t$  は正規分布  $N(F_t(\theta_t - G_t\hat{\theta}_{t-1}), \sigma_t^2)$  (7.3.8)
- 正規分布ベイズ更新の式 (1.8.11)

$$\Rightarrow \hat{\theta}_t = G_t\hat{\theta}_{t-1} + \frac{\frac{F_t}{\sigma_t^2}}{\frac{1}{G_t^2\delta_{t-1}^2} + \frac{F_t^2}{\sigma_t^2}} \cdot e_t \quad (7.3.9)$$

$$\delta_t^2 = \frac{1}{\frac{1}{G_t^2\delta_{t-1}^2 + \tau_t^2} + \frac{F_t^2}{\sigma_t^2}} \quad (7.3.10)$$

$\Rightarrow$  事後確率分布は  $N(\hat{\theta}_t, \delta_t^2)$

$\Rightarrow$  カルマン・フィルターの漸化式が求められる

## カルマン・フィルターの導出

新しい分散の系列を定義する

$$\rho_t^2 \equiv G_t^2 \delta_{t-1}^2 + \tau_t^2 \quad (7.3.12)$$

$$\delta_t^2 = \frac{\rho_t^2 \sigma_t^2}{F_t^2 \rho_t^2 + \sigma_t^2} \quad (7.3.13)$$

⇒ (7.3.9) は

$$\hat{\theta}_t = \underbrace{G_t \hat{\theta}_{t-1}}_{\substack{\downarrow \\ \text{1 時点先予測}}} + \underbrace{\frac{F_t \rho_t^2}{F_t^2 \rho_t^2 + \sigma_t^2}}_{\substack{\downarrow \\ \text{イノベーションの寄与}}} \cdot e_t \quad (7.3.15)$$

## シミュレーション例 1 I

### 例：品質管理

ロットの不良率を推定する

- 観測方程式  $y_t = \theta_t + v_t$  (7.4.1)

- システム方程式  $\theta_t = \theta_{t-1} + w_t$  (7.4.2)

- 各パラメータ  $F_t = G_t \equiv 1, \sigma_t^2 \equiv 2, \tau_t^2 \equiv 2, \delta_t^2 \equiv 1, \rho_t^2 \equiv 2, \delta_0^2 = 1$

- カルマン・フィルター  $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{カルマン利得}} (y_t - \hat{\theta}_{t-1})$  (7.4.3)

(7.4.3) を繰り返すとこのカルマン・フィルターは指数平滑になる

$$\hat{\theta}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} y_{t-j} + \left(\frac{1}{2}\right)^t \hat{\theta}_0 \quad (7.4.4)$$

## シミュレーション例 1 II

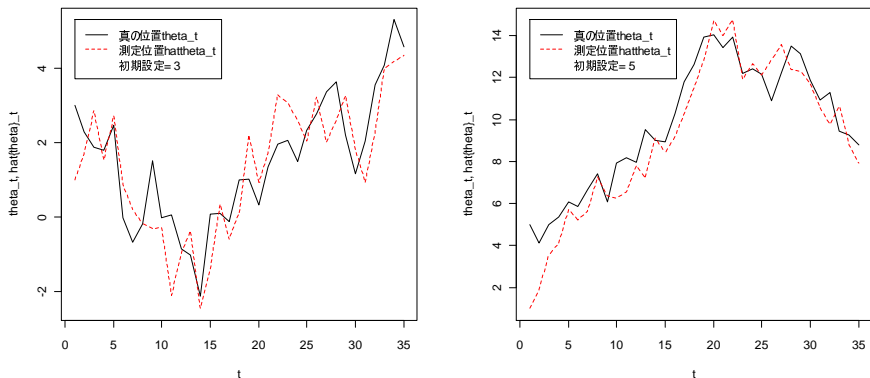


図 7.6: カルマン・フィルターによる運動対象への追従

## シミュレーション例 2 I

### 例：周期的動きへの追従

$G_t = \frac{(-1)^t}{2}$ ,  $F_t =$  任意のとき

- 観測方程式  $y_t = F_t \theta_t + v_t$
- システム方程式  $\theta_t = \frac{(-1)^t}{2} \theta_{t-1} + w_t$
- カルマン・フィルタ  $\hat{\theta}_t = \frac{(-1)^t}{2} \hat{\theta}_{t-1} + \frac{F_t}{F_t^2 + 1} (y_t - \frac{(-1)^t}{2} F_t \hat{\theta}_{t-1})$

## シミュレーション例 2 II

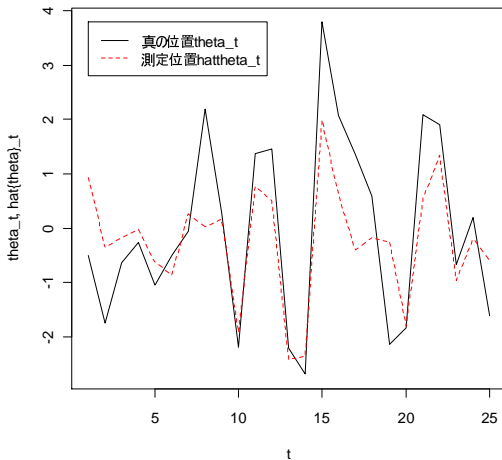


図 7.7: 周期的データに対するカルマン・フィルターの追従

## まとめ

- シミュレーション例で見たように，時間によってパラメータが変化する場合でも推定が可能（図 7.6）
- シミュレーション例で見たように，周期的にパラメータが大きく変化する場合でも推定が可能（図 7.7）