第 1 章 ベイズの定理

1.1 トーマス・ベイズとベイジアン
1.2 ベイズの定理とその証明
1.3 原因の確率
1.4 主観確率の役割

05T4078Y 茂木哲矢

September 19, 2008

Outline

ベイズの定理

統計的決定

- データによる行動決定
- ベイズの定理による意思決定

ベイズの定理

- 広い意味でのデータを確率論の枠組みの中で情報として取り扱うことが出来る
- 「統計的決定」は「ベイズ（的）意思決定」を内容にしている
- ベイズ的 = ベイジアン (Bayesian)

問 1 $P(A|C) = 0.95$，$P(A^c|C^c) = 0.95$ であれば，検査法は一応は信頼できるものといえよう．検査を受ける人の中で, 実際にガンの確率が $P(C) = 0.005$ のとき，$P(C|A)$ を求めよ．

問 2 検査の信頼性を $R(0 < R < 1)$ とする．$P(C|A) \geq 0.90$ となるためには，R はどの範囲の値であるべきか．

確率

確率 $P(\cdot)$

A1 $P(E) \geq 0$

A2 $P(\Omega) = 1$

A3

$$^1E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \cap E_j = \phi(i \neq j) \tag{1.2.2}$$

ならば，

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \tag{1.2.3}$$

条件付き確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0) \tag{1.2.4}$$

[1] $\{E_1, E_2, \cdots\}$ は事象 E の「分割」という

ベイズの定理の証明 I

Ω の分割を E_i，F を任意の事象として，$A = E_i$，$B = F$ とおくと，

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)} \tag{1.2.5}$$

分子について $A = F$，$B = E_i$ とおき，

$$P(E_i \cap F) = P(E_i) \cdot P(F|E_i) \tag{1.2.6}$$

分母については，$\{E_1 \cap F, E_2 \cap F, \cdots\}$ が F の分割であることより，

$$P(F) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j) \cdot P(F|E_j) \tag{1.2.7}$$

ベイズの定理の証明 II

ベイズの定理

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F|E_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(E_j) \cdot P(F|E_j)} \tag{1.2.8}$$

問 1，問 2 についてベイズの定理を用いて考える．

問 1 (1.2.8) **において，** $E_1 = C$**，** $E_2 = C^c$**，** $F = A$ **とし，**
$P(A|C) = 0.95$**，** $P(A|C^c) = 0.05$**，** $P(C) = 0.005$**，** $P(C^c) = 0.995$
を代入すると， $P(C|A) = 0.08715$

問 2 $P(C|A) \geq 0.90$ **を解くと，**

$$\frac{0.005R}{0.005R + 0.995(1-R)} \geq 0.90$$

から， $R \geq 0.99950$ **となる**

原因の確率

- A を得られた結果，$H_1, H_2, \cdots, H_k$ を原因とする
- A が起こったとき原因が H_i である確率 $P(H_i|A)$ が知りたい
- 知ることが出来るのは，原因に対する結果の確率 $P(A|H_i)$
- 原因の確率を直接計算することは困難

原因の確率

- $H_1, H_2, \cdots, H_k$ は互いに排反
- $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_k = \Omega$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum P(H_j) \cdot P(A|H_j)} \tag{1.3.1}$$

$P(H_i)$ 事前確率

$P(H_i|A)$ 事後確率

原因の確率の例

壺のモデル

第一の壺 赤 1，白 2

第二の壺 赤 2，白 1

- 一個取り出したら白

- $H_1 = \{$ 第一の壺から取り出す $\}$
- $H_2 = \{$ 第二の壺から取り出す $\}$

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2$$

また，

$$P(A|H_1) = 2/3, P(A|H_2) = 1/3$$

(1.3.1) より，

$$P(H_1|A) = 2/3$$
$$P(H_2|A) = 1/3$$

主観的確率とその例 I

標的と射手

- 命中率 8 割の射手 A
- 命中率 3 割の射手 B
- 標的 X

- $H_1 = \{$A が射つ$\}$
- $H_2 = \{$B が射つ$\}$
- $F = \{$ 標的 X が射たれる $\}$

- $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$（理由不十分の原則より）のとき
ベイズの定理より，

$$P(H_1|F) = 0.73 \tag{1.4.1}$$

- $P(H_1) = 0.25$，$P(H_2) = 0.75$ のとき

$$P(H_1|F) = 0.471 \tag{1.4.2}$$

これは事実 F により，A に対する疑いが高まったことを意味する

- $P(H_1)$，$P(H_2)$ の値は，主観に基づく

主観的確率とその例 II

- 確率を主観の大まかな表現として使う
- 数字の大小でなく，個人の主観を容認すると考えている点が重要
- ベイズの定理を用いる場合の重要な前提

まとめ

ベイズの定理

- 広い意味でのデータを確率論的に扱える
- 結果から原因を推定することが出来る
- 個人の主観に基づく確率を扱うことが出来る