

第10章 信頼性とベイズ統計学

§10.1 信頼性と確率論

§10.2 信頼性のベイズ統計学的取り扱い

相原 功昌

茨城大学

2008年11月21日

信頼性と確率論

信頼性

指定された条件の下で、あるシステム、装置、機械がある一定期間 t の間、意図された機能を果たす確率

確率の値を定めるために、統計的推定の理論を利用

信頼性が議論される → 信頼性が十分に定められていない

例

- 設計段階
- 試作段階
- テスト段階など

→ 信頼性を定めるデータそのものが無い

ベイズ統計学の方法が有効

二項分布

状態

S: 装置が正常に作動している状態 … 成功 (Success)

F: そうでない状態 (「故障」「事故」など) … 失敗 (Failure)

S, F は偶然のメカニズムで起こる

S の確率	F の確率
p	$1 - p$

n 回の試行中、 x 回の S、 $n - x$ 回の F を得る確率

→ 二項分布 (式 (10.1.1)) に従う

$$f(x|p) = {}_n C_x p^x (1 - p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (10.1.1)$$

→ 固定した回数の試行 (ベルヌーイ試行) における S, F の確率

幾何分布

信頼性において

- 問題になるのは、試行回数 n が固定されていない場合
いつ F が生じるか
 - F が生じるまでの試行回数
 - F が生じるまでの S の回数を数える

F を問題とするので

S の確率	F の確率
$1 - p (= q)$	p

試行回数 x の時、最初に F が生じる確率

→ 幾何分布 ((10.1.2)) に従う

$$f(x|p) = p(1 - p)^{x-1} (x = 1, 2, \dots) \quad (10.1.2)$$

最初に F を得る回数 → 離散的な時間と考える

(離散的) 待ち時間分布

- X : 離散的な時間
→ 幾何分布に従う確率変数
期待値、分散 → 式 (10.1.3)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad (10.1.3)$$

1 個の F を確定的に得るための時間 → $\frac{1}{p}$

この意味で幾何分布 (式 (10.1.2)) を、**離散的** 待ち時間分布と言う

指数分布

離散時間 → 幾何分布

連続時間 → 指数分布 (式 (10.1.4))

(→ 連続的待ち時間分布)

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (10.1.4)$$

$$\lambda = -\log(1 - p)$$

X : 故障 (F) までの時間 (寿命)

$$\text{期待値} : \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{分散} : V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

故障までの時間

$D(X)$: 標準偏差

期待値 $\frac{1}{\lambda}$ を中心とした標準偏差の範囲

$\mathbb{E}(X) \pm D(X)$ が、指数分布では0まで届いている

→ 対象の現象は、近い将来起こっても不思議ではない

確率が小さい \neq 遠い将来にしか起こらない

期待値 $\frac{1}{\lambda}$ 以上の寿命を得る確率

$$\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{e} \doteq 0.37$$

→ 指数分布では、期待値より小さい値をとる確率のほうが大きい

信頼性

ある装置が時点 x で正常に作動している ($X > x$) 確率
→ 式 (10.1.6)

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x} \quad (10.1.6)$$

式 (10.1.6) が**信頼性**

$F(X) = P(X \leq x)$ を累積分布関数とすると
信頼性 $R(X)$ は 式 (10.1.8) と表せる

$$R(X) \equiv P(X > x) = 1 - F(X) \quad (10.1.8)$$

記憶を持たない性質

装置が a までは正常に動作しているという条件の下で、寿命が b だけ伸びる確率

$$P(X > a + b | X > a) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(X > b)$$

システムが a まで作動してきたという過去に関係なく
寿命 b だけは正常に作動する確率が求まる

→ 記憶を持たないかのような性質

瞬間故障率

式 (10.1.4), (10.1.6), (10.1.8) より

$$\frac{f(x|\lambda)}{1 - F(x)} = \lambda \quad (10.1.10)$$

が成立する

式 (10.1.10) → 瞬間故障率

ある時点 x で、まだ正常に作動しているという条件の下、次の時間間隔 Δx で寿命が終わる確率

$$\frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{P(X > x)} = \frac{f(x|\lambda)\Delta x}{1 - F(x)} = \lambda\Delta x \quad (10.1.11)$$

§10.2 信頼性のベイズ統計学的取り扱い

信頼性は、データが少ない・全く無い場合に問題

→ ベイズ統計学が役に立つ

例 ある工業用エンジン

- 故障するまでの時間は平均 θ の指数分布 $f(x|\frac{1}{\theta}) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ に従う
- 2人の設計者 A 氏, B 氏が共同でエンジンの改良設計を行う
- 仕様では、 $\theta \geq 3000(h)$
- 両氏の θ の事前確率分布： $w_A(\theta), w_B(\theta)$

改良した試作型エンジン 2 機をテストしたら、故障までの時間が $(x_1, x_2) = (2000, 2500)$ だった

両氏の事後確率分布 $w'_A(\theta|2000, 2500), w'_B(\theta|2000, 2500)$ を求める
事前確率分布、事後確率分布 → 表 (10.1)

例の結果

事後確率分布 → 式 (10.2.1)

$$\begin{aligned}
 w'(\theta|x_1, x_2) &\propto \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-\frac{x_1}{\theta}} \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-\frac{x_2}{\theta}} w(\theta) \\
 &= \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{\theta}\right) w(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{10.2.1}$$

表 10.1 両氏の平均 θ の事前確率分布と事後確率分布

平均 θ の範囲 (区間内では一様)	事前確率		事後確率	
	設計者 A	設計者 B	設計者 A	設計者 B
0-1000(h)	0.01	0.15	7.4×10^{-4}	0.01
1000-2000	0.04	0.15	2.5×10^{-2}	0.09
2000-3000	0.20	0.20	0.16	0.15
3000-4000	0.50	0.20	0.34	0.13
4000-5000	0.15	0.15	0.08	0.07
> 5000	0.10	0.15	0.40	0.55
計	1.00	1.00	1.00	1.00

事前の情報と、データの効力の関係がはっきりと見える